THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Pierre PERNÈS

1re THÈSE

BALISTIQUE ET GRANULOMÉTRIE DES ASPERSEURS
THÉORIE ET EXPÉRIMENTATION

2e THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 Juin 1966 devant la Commission d'examen :

MM. FORTIER — *Président.*

COMOLET, BRUN — *Examinateurs.*

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES
POUR L'AGRICULTURE, LES FORÊTS ET L'ÉQUIPEMENT RURAL

Parc de Tourvoie - ANTONY (Hauts de Seine)

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Pierre PERNÈS

1re THÈSE

BALISTIQUE ET GRANULOMÉTRIE DES ASPERSEURS
THÉORIE ET EXPÉRIMENTATION

2e THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 28 Juin 1966 devant la Commission d'examen :

MM. FORTIER — *Président.*

COMOLET, BRUN — *Examinateurs.*

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES
POUR L'AGRICULTURE, LES FORÊTS ET L'ÉQUIPEMENT RURAL

Parc de Tourvoie - ANTONY (Hauts de Seine)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen.....M. ZAMANSKY

PRENANT.....	T	Anatomie & Histologie comparée
GRASSE.....	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST.....	T	Chimie organique
WYART	T	Minéralogie & cristallographie
TEISSIER.....	T	Zoologie
AUGER.....	T	Physique quantique & relativité
MONNIER.....	T	Physiologie générale
PIVETEAU.....	T	Paléontologie
ROCARD.....	T	Physique ENS
CARTAN.....	T	Mathématiques ENS
LAFITTE.....	T	Chimie générale
N.....	T	Géométrie supérieure
COULOMB.....	T	Physique du globe
Mlle COUSIN.....	T	Biologie animale SPCN
CHRETIEN.....	T	Chimie minérale
BOCQUET.....	T	Zoologie
KASTLER.....	T	Physique ENS
EPHRUSSI	T	Génétique
GAUTHERET....	T	Biologie végétale CPEM
LUCAS R.		Recherches physiques
THOMAS.....	T	Biologie cellulaire
MORAND.....	T	Physique enseignement
SOLEILLET.....	T	Physique CPEM
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides
DRACH.....	T	Zoologie
QUENEY	T	Météorologie & dynamique de l'atmosphère
GALLIEN.....	T	Embryologie
EICHORN.....	T	Botanique
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale SPCN
Melle CAUCHOIS.	T	Chimie physique
THELLIER.....	T	Physique du globe
PONCIN.....	T	Mécanique générale
DUBREIL	T	Arithmétique & théorie des nombres
QUELET.....	T	Chimie organique
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER...	T	Chimie macromoléculaire
JUNG.....	T	Géologie
TRILLAT.....	T	Microscopie & diffraction électronique
WIEMANN.....	T	Chimie organique & structurale
VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES....	T	Théorie physique
AMIEL.....	T	Chimie générale
HOCART.....	T	Minéralogie & cristallographie
J.P MATHIEU...	T	Physique optique
COUTEAUX.....	T	Cytologie
CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions & topologie
FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine
JOST.....	T	Physiologie comparée
FORTET.....	T	Calcul des probabilités & physique mathématiques
SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel & intégral
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale
MALAVARD.....	T	Aviation (technique aéronautique)
BRELOT.....	T	Analyse supérieure
NORMANT.....	T	Synthèse organique
BENARD.....	T	Chimie appliquée
DUGUE.....	T	Statistique mathématique
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie
ULRICH.....	T	Physiologie végétale appliquée
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques
CHADEFAUD....	T	Botanique
Melle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS.....	T	Anatomie & histologie comparées
EHRESMANN....	T	Topologie algébrique
FRANÇON	T	Physique SPCN
GLANGEAUD....	T	Géographie physique, géologie dynamique
DODEMENT.....	T	Mathématiques MGP
PISOT.....	T	Technique mathématique de la physique
ROCH.....	T	Géologie
SCHATZMANN...	T	Astrophysique
TERMIER.....	T	Géologie générale
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales

LENNUIER.....	T	Physique MGP
ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique théorique
DIXMIER.....	T	Mathématiques MPC
SOUCHAY.....	T	Chimie générale
AIGRAIN.....	T	Electrotechnique
BRUSSET.....	T	Chimie systématique
LEVY.....	T	Physique théorique des hautes énergies
Mme CHAIX.....	T	Chimie biologique
Mme HUREL PY.	T	Biologie végétale CPEM
PANNETIER.....	T	Chimie générale I
BRUN	T	Mécanique des fluides I
Mme.DUBREIL..	T	Mathématiques (Agré.)
Mme LELONG...	T	Mathématiques II ENS
BELLAIR.....	T	Géologie SPCN
COTTE.....	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.....	T	Chimie organique physique
LAMOTTE.....	T	Zoologie ENS
OLMER.....	T	Energétique générale
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ...	T	Chimie physique
BROSSEL.....	T	Physique atomique
BUSER.....	T	Physiologie comparée
CAMUS.....	T	Physiologie végétale
CURIEN.....	T	Minéralogie & cristallographie
POSSOMPES.....	T	Zoologie
PULLMANN.....	T	Chimie quantique
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire & radio-activité
VILLE.....	T	Econométrie
WILLEMART....	T	Chimie CPEM
FREYMANN.....	T	Recherches physiques
ROLLET.....	T	Chimie minérale
Mlle JOSIEN	T	Chimie SPCN
CHEVALLEY....	T	Géométrie algébrique & théorie des groupes
GERMAIN.....	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD.....	T	Chimie physique
BERTHELOT....	T	Physique des particules fondamentales
BRICARD.....	T	Météorologie
Mme ALBE-FESSARD. .	T	Psycho-physiologie
M. JULIA.....	T	Etude des molécules naturelles complexes
MAGAT.....	T	Physico-chimie des rayonnements
Mlle QUINTIN. ..	T	Electrochimie
MONOD.....	T	Chimie du métabolisme
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique
CHARLOT..	T	Chimie analytique
CHATELET.....	T	Chimie CPEM
MATTLER.....	T	Physique SPCN
BOUISSIERES....	T	Radiochimie
Mme COUTURE ..	T	Thermodynamique & mécanique physique
FRANC.....	T	Biologie animale CPEM
SCHNELL.....	T	Botanique tropicale
STOLKOWSKI....	T	Physiologie générale
ACHER.....	T	Chimie biologique
BAUDOUIN.....	T	Biologie animale CPEM
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT.....		Géophysique ionosphère
BOUREAU.....	T	Botanique
CURIE D.		Physique MGP
DURAND DELGA.	T	Géologie
HELLER.....	T	Physiologie végétale
TORTRAT.....	T	Calcul des probabilités
CAILLEUX	T	Géologie SPCN
MAGNAN		Physique électricité
DAUDEL.....	T	Mécanique ondulatoire
Mlle FOURCROY.		Biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET BRUHAT....		Mécanique analytique & mécanique céleste
Mlle VEIL.....	T	Physiologie générale
LWOFF.....	T	Microbiologie
SIESTRUNCK.....	T	Mécanique physique & expérim.
CABANNES.....	T	Mécanique générale
CAIRE.....	T	Géographie physique & géologie dynamique
COMOLET.....		Mécanique des fluides
DELLOUE.....	T	Physique de l'exosphère
HOUILLON		Biologie animale CPEM
OLIVIER...		Anthropologie
SAMUEL	T	Mathématiques (ENS jeunes filles)
THIRY..... ..	T	Mécanique céleste
ABELES.....	T	Physique SPCN
AMAT.....	T	Thermodynamique
AUBOIN.....	T	Géologie
Mme BENOIT - GUEUTAL..	T	Physique nucléaire & radioactivité
BOUGIS..... .		Biologie végétale marine Villefranche s/mer
RIGAUDY.....	T	Chimie SPCN
COLLONGUES. ..		Chimie CPEM
DUBERT..... ..		Biochimie
NOZIERES.....		Physique générale
CADIOT.....		Chimie organique
IVANOFF.....		Océanographie physique
FRANÇOIS.....		Zoologie
TALBOT..... ...		Génie chimique
Mme NOUGAREDE		Botanique
BRUHAT.....	T	Mathématique MPC
FOURNET..... .		Electricité générale
DEHEUVELS.....	T	Mathématiques propédeutique

FURON	T	Géologie SPCN
Mme GANS	T	Génétique
GENEVES		Biologie végétale CPEM
HUPE	T	Pétrographie
HOLLANDE	T	Biologie générale
LIONS	T	Analyse numérique
MAITTE	T	Chimie organique
NICOLAS		Géologie appliquée
PANIGEL		Biologie générale
RAVIER	T	Pétrographie
MOREL F.	T	Physiologie comparée
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides
ROUBINE		Electronique ESE
SILBER	T	Chimie CPEM
UEBERSFELD	T	Electronique
HERVE	T	Mathématiques
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique
BALKANSKI		Physique MPC
LE CORRE	T	Electricité
NATAF	T	Physique nucléaire & radioactivité
ECHALIER		Biologie animale CPEM
BARRAUD	T	Physique CPEM
DARS		Géologie structurale & appliquée
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle
SIGWALT	T	Chimie SPCN
BLAQUIERE		Electronique
BARUCH		Physique propédeutique
ARNOUS	T	Physique théorique
SLONIMSKI		Génétique
MALLIAVIN	T	Mathématiques propédeutique
GAUDEMAR		Chimie propédeutique
BROUSSE	T	Mécanique théorique
ROSCH	T	Astronomie
GUY	T	Physique expérimentale
LAZARD		Mathématiques MPC
MOREL P.		Physique MPC
ARSAC		Programmation
LEFEBVRE		Chimie MPC
BOK		Physique propédeutique
CHAPEVILLE		Biochimie
BENOIT		Physique CPEM
RIO		Chimie CPEM
JAUZEIN		Géologie ENS
PREVOST G.		Biologie végétale CPEM
FAVARD P.		Biologie animale CPEM
Mme CHARNIAUX - COTTON		Evolution des êtres organisés
Mlle FICINI		Chimie CPEM
LEQUEUX		Astronomie
COHEN - TANNOUDJI		Physique atomique
TAVERNIER		Physique CPEM
DURAND Michel		Biologie animale SPCN
PASCAUD		Physiologie
Mme PETIT		Biologie animale CPEM
CAGNAC		Physique agrégation
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire
KRASNER	T	Mathématiques
BENZECRI	T	Statistiques
VINH MAU		Physique MGP
DUQUESNES		Physique CPEM
SCHUTZENBERGER		Programmation
TREMILLON		Chimie MPC
FAYARD		Chimie MPC
BUVET		Chimie CPEM
AUTHIER		Physique MPC
PICINBONO	T	Physique CPEM
BONNEFILLE		Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO		Biologie végétale
CUVILLIER		Micropaléontologie

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

MANGENOT	T	Biologie végétale
JACQUINOT P.	T	Optique
GUINIER A.	T	Electricité & physique des solides
GRIVET P.	T	Electronique
BLANC-LAPIERRE A.	T	Accélérateur linéaire
L'HERITIER P.	T	Génétique des virus
LEMEE G.	T	Ecologie végétale
MOYSE A.	T	Physiologie végétale
DODE M.	T	Chimie thermodynamique
DENY J.	T	Mathématiques
RIVIERE A.	T	Géologie générale & sédimentologie
MICHEL A.	T	Chimie minérale
MAY R.	T	Anatomie comparée
DELANGE H.	T	Mathématiques
CHAPELLE J.	T	Physique expérimentale
LACOMBE P.	T	Métallurgie
BENOIT P.	T	Physiologie générale
GUINOCHET	T	Biologie végétale SPCN
NERON A.	T	Mathématiques
NOZERAN R.	T	Botanique approfondie
CASTAING R.	T	Thermodynamique
ELLENBERGER	T	Géologie structurale
LEDERER E.	T	Chimie biologique
RIZET J.	T	Génétique
LENDER T.	T	Biologie animale SPCN

POITOU G.	T	Mathématiques
FREON P	T	Chimie organique
TONNELAT.....	T	Biologie physico-chimique
BRUNN J.	T	Géologie hystorique
JEAN M.	T	Physique nucléaire
BERGERARD J. .	T	Zoologie
ROGER J.	T	Paléontologie
LEFORT M.....	T	Chimie nucléaire
LAGARRIGUE A.	T	Physique des hautes énergies
JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique
ARNULF A.	T	Optique
ROUAULT M. ...	T	Diffraction électron.
MARECHAL A. ..	T	Optique théorique et appliquée
MAZET R.	T	Mécanique générale
DAVID Serge	T	Chimie agrégation
GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles
LESIEUR L.	T	Mathématiques MPC et algèbre
KOURGANOFF ..	T	Astronomie
ARNOULT P. ...	T	Physique électronique
KAHANE J.P. ..	T	Mathématiques
BROCHARD J. ..	T	Physique propédeutique
Mme ROIZEN....	T	Physique CPEM
BERTEIN F. ...	T	Electronique
MALGRANGE B..	T	Mathématiques
CORABOEUF E..	T	Physiologie animale
FRIEDEL J.	T	Physique des solides
CHEVAUGEON ..	T	Cryptogamie
MEYER P.	T	Physique théorique & atomique
LEHMANN P. ...	T	Accélérateur linéaire
CHABBAL R. ...	T	Physique propédeutique
DELCROIX J.M..	T	Physique des plasmas
CERF J.	T	Mathématiques
D'ESPAGNAT B..	T	Physique théorique
SCHAEFFER P. .	T	Microbiologie
DE GENNES P. ..	T	Physique des solides
Mme MARTY N..		Physique propédeutique
GOURDIN M. ...		Physique théorique
PEREZ-Y-JORBA.		Physique propédeutique
GORENFLOT E..		Biologie végétale SPCN
RIOU M.		Physique nucléaire
BROUSSE R.		Géologie SPCN
LIORET C.		Physiologie végétale
CLAUSER H. ...		Chimie biologique
JANCOVICI B. ..		Physique atomique
LURCAT J.		Physique propédeutique
LE BERRE J. ...		Entomologie
LAVOREL J.		Biophysique
PERIO P.		Physique propédeutique
FETIZON M. ...		Stéréochimie
CHEMLA M.		Chimie des isotopes
MAZIERES C. ...		Chimie SPCN
VILKAS M.		Chimie CPEM
BLANDIN A.		Physique des solides
BRUN G.		Génétique
MERCOUROFF ..		Physique agrégation
ANDRE J.		Microscopie électronique
CHEVALLIER F..		Physiologie animale
Mlle MARCOU...		Biologie cellulaire CPEM
BOURDU R.		Physiologie végétale
BERKALOFF A..		Biologie animale CPEM
Mlle LEFORT M.		Biologie cellulaire CPEM
Mme LAMBERT.		Physique CPEM
BIZOT J.C.		Physique MPC
GUIRAUD J.P...		Mécanique
LABOUESSE B...		Chimie SPCN

Secrétaire .....R. POULAIN

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué au laboratoire d'Hydraulique de l'ancien CENTRE DE RECHERCHES ET D'EXPERIMENTATION DE GENIE RURAL à Antony (Hauts-de-Seine), devenu CENTRE NATIONAL D'ETUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES POUR L'AGRICULTURE, LES FORETS ET L'EQUIPEMENT RURAL (C.E.R.A.F.E.R.).

Qu'il me soit permis tout d'abord d'exprimer ma reconnaissance à M. le Professeur FORTIER qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider mon jury de thèse.

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à M. le Professeur COMOLET qui ne m'a ménagé ni ses précieux conseils, ni son attentive sollicitude m'évitant ainsi de nombreuses hésitations. Qu'il veuille bien ici trouver l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi à M. Le Professeur BRUN qui a bien voulu faire partie du jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. GUYON qui m'a fait bénéficier de son expérience dans le domaine particulier de la recherche en hydraulique agricole.

Que M. l'Ingénieur Général ROCHE, Directeur du CERAFER et M. l'Ingénieur en Chef COSSON trouvent ici l'expression de ma gratitude de m'avoir placé dans les conditions les meilleures pour effectuer ce travail.

BALISTIQUE ET GRANULOMETRIE DES ASPERSEURS
THEORIE ET EXPERIMENTATION

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 1

PREMIERE PARTIE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 1 : ETUDES RELATIVES A LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS 3

1. Angle de tir et portée maximum 3
2. La portée 3
3. Une théorie balistique des asperseurs 4
4. Vitesse terminale des gouttes 6

Chapitre 2 : ETUDES RELATIVES A LA GRANULOMETRIE DES ASPERSEURS 7

1. Méthodes expérimentales 7
2. Résultats expérimentaux 9
3. Critique de la bibliographie 11

DEUXIEME PARTIE

THEORIE BALISTIQUE DES ASPERSEURS

Chapitre 1 : AERODYNAMIQUE DES GOUTTES 12

Chapitre 2 : DYNAMIQUE DES GOUTTES 17

1. Equations du mouvement d'une goutte 17
2. Conclusion 20

Chapitre 3 : ETUDE MATHEMATIQUE DE LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS 21

1. Les équations différentielles du mouvement 21
2. Equation de l'hodographe du mouvement 24
3. Etude de l'hodographe 26
4. Rectification de la trajectoire 30
5. Détermination des équations paramétriques de la trajectoire 31
6. Cas particulier d'intégration complète $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 32
7. Etude de la trajectoire au voisinage de l'origine 35
8. Intégration approchée, dans certaines limites, des équations paramétriques 36
9. Intégration dans le cas limite ou $\frac{A}{\rho V} \to o$ 40
10. Méthode de calcul des trajectoires 43

Chapitre 4 : ETUDE EXPERIMENTALE DE LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS..... 48

1. Les raisons d'une expérimentation sur modèle réduit..... 48
2. Avantages et inconvénients de l'expérimentation sur modèle réduit..... 49
3. Description du modèle réduit 49
4. Observation du jet - Définitions..... 51
5. Relevé de la trajectoire de plus grande portée..... 54

Chapitre 5 : CONCLUSIONS DE L'ETUDE BALISTIQUE 56

1. Nomenclature des expériences réalisées..... 56
2. Précision des mesures..... 57
3. Présentation des résultats expérimentaux..... 59
4. Détermination et précision du terme $\frac{m}{2A}$ 59
5. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux de la première série d'expériences..... 60
6. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux de la deuxième série d'expériences 61
7. Utilisation des équations approchées 62
8. Application de la formule approchée à l'étude des trajectoires d'un asperseur réel..... 66
9. Conclusions générales de l'étude balistique 71

RELEVES DES RESULTATS EXPERIMENTAUX ET THEORIQUES 73

TROISIEME PARTIE

ETUDE DE LA GRANULOMETRIE DES ASPERSEURS

Chapitre 1 : SCHEMA PROBABILISTE LIE A LA GRANULOMETRIE..... 98

1. Loi de probabilité élémentaire de la durée séparant deux évènements consécutifs..... 98
2. Loi de probabilité élémentaire de la durée séparant n + 2 évènements consécutifs 100
3. Seconde démonstration..... 101

Chapitre 2 : DETERMINATION EXPERIMENTALE DU DIAMETRE MOYEN DES GOUTTES TOMBEES A UNE DISTANCE DONNEE DE L'AJUTAGE 104

1. Méthode photographique - Choix du milieu récepteur 104
2. Méthode photographique - Réalisation expérimentale 106
3. Méthode photographique - dépouillement des résultats expérimentaux. 107
4. Description de la deuxième méthode expérimentale 108

Chapitre 3 : CONCLUSION DE L'ETUDE GRANULOMETRIQUE 110

1. Détermination du diamètre des gouttes - Spectre granulométrique 110
2. Détermination du coefficient de trainée Cx des gouttes de portée maximale..... 118
3. Conclusion de l'étude granulométrique..... 121

CONCLUSIONS GENERALES DE L'ETUDE - PERSPECTIVES DE RECHERCHES 122

1. Conclusions générales..... 122
2. Perspectives de recherches..... 123

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... 125

INTRODUCTION

L'étude expérimentale présentée dans cette étude s'inscrit dans le cadre des préocupations de la Section Hydraulique du CENTRE NATIONAL D'ETUDES TECHNIQUES ET DE RECHERCHES TECHNOLOGIQUES POUR L'AGRICULTURE, LES FORETS ET L'EQUIPEMENT RURAL (C.E.R.A.F.E.R.) en ce qui concerne la technologie des asperseurs utilisés en irrigation.

Les essais poursuivis depuis déjà plusieurs années sur les asperseurs, et notamment en ce qui concerne leurs caractéristiques essentielles, à savoir leur courbe pluviométrique et leur uniformité d'arrosage, ont montré que celles-ci pouvaient être très variables d'une marque d'appareils à une autre, alors que leur principe de fonctionnement ne différait pas. Les améliorations apportées par les constructeurs semblent avoir été réalisées empiriquement, par tâtonnement presque, sans qu'une logique fondamentale ait servi de guide à leurs réalisations. En un mot, la connaissance du phénomène de l'aspersion et des interactions des paramètres dont il dépend semble faire actuellement défaut.

C'est la raison du choix du sujet : "étude balistique et granulométrie des asperseurs". Cette étude ne prétend pas résoudre le phénomène de l'aspersion dans sa généralité. Pour des raisons de commodité expérimentale, nous avons en effet travaillé sur modèle réduit et seule l'expérimentation future, effectuée sur des asperseurs réels, confirmera ou infirmera les conclusions présentées dans cette étude.

Dans une première partie, consacrée à la bibliographie, nous montrerons l'esprit des recherches effectuées auparavant en analysant les hypothèses qui les accompagnent. Si les études concernant la granulométrie sont relativement nombreuses, celles consacrées à la balistique extérieure des asperseurs sont beaucoup plus rares.

L'étude bibliographique nous ayant conduit à rejeter les hypothèses jusqu'alors utilisées en ce qui concerne la balistique, nous établirons, dans une seconde partie, une théorie nouvelle que nous confronterons aux résultats expérimentaux obtenus. Mais la balistique d'un asperseur ne peut être dissociée de sa granulométrie, c'est-à-dire des gouttes émises par lui. Si l'artilleur qui étudie la balistique d'un canon connait *a priori* les caractéristiques de son projectile, il n'en est pas de même en ce qui nous concerne. Balistique et granulométrie sont ici deux éléments indissociables d'un même problème.

La granulométrie fera donc l'objet de la troisième partie et nous en profiterons pour proposer un schéma probabiliste de l'arrivée des gouttes sur une surface donnée.

Muni des résultats globaux de la seconde et troisième partie, nous en ferons la synthèse pour tenter de parvenir à des conclusions simples qu'il sera peut être possible de généraliser.

Cette étude balistico-granulométrique ouvre la voie à de nombreuses recherches appliquées et ne veut être, en définitive, qu'un modeste préambule à la résolution des problèmes techniques que pose l'irrigation par aspersion pour ce qui est, en particulier, de sa phase ultime et capitale, c'est-à-dire d'assurer mécaniquement la meilleure répartition possible de l'eau sur une surface donnée.

PREMIERE PARTIE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I

ETUDES RELATIVES A LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS

1. ANGLE DE TIR ET PORTEE MAXIMALE

Le premier problème abordé par les chercheurs fut la détermination de l'angle de tir α à donner à un asperseur pour que sa portée soit maximale, toutes choses égales par ailleurs. Sur cette question, les résultats des différentes études concordent : l'angle de tir assurant la portée maximale est compris entre 30° et 35°.

BIELAYIEV et LEBEDIEV, dans leur ouvrage intitulé "*Les Machines d'Irrigation par Aspersion*" et paru à Moscou en 1957, indiquent pour α la valeur 30°.

BILANSKY et KIDDER, dans un article paru en 1958 sous le titre "*Factors that Affect the Distribution of Water from a Medium Pressure Rotary Irrigation Sprinkler*", mentionnent la valeur de 30° déterminée expérimentalement.

Mis à part les asperseurs utilisés à des fins spécifiques telle que l'irrigation sous frondaison par exemple, nous avons constaté que les constructeurs ont adopté un angle de tir compris entre 30° et 35°.

2. LA PORTEE

On distingue la portée dite statique obtenue lorsque l'asperseur est fixe et la portée dite cinématique, l'appareil étant en rotation. Bien entendu, la portée statique est supérieure à la portée cinématique et seule cette dernière présente un intérêt pour le praticien.

De nombreux auteurs ont cherché à lier la portée aux différents paramètres susceptibles de l'influencer :

Pour un angle de tir $\alpha = 32°$, PIKALOV propose la relation,

$$R = 0{,}42\ H + 10^3\ d$$

dans laquelle R désigne la portée cinématique en mètres, H la pression exprimée en mètres de colonne d'eau et d le diamètre de la buse en mètres.

GAVYRINE propose une formule plus complexe :

$$R = 0{,}415 \sqrt[3]{\alpha\, d}\; H^{2/3}$$

dans laquelle l'angle de tir intervient comme paramètre. L'auteur indique d'ailleurs les limites de variations de α ($5° < \alpha < 32°$). La pression H est exprimée en mètres de colonne d'eau et la formule ne rend compte des résultats expérimentaux que dans le domaine $10 < H < 100$ m. Le diamètre de la buse d est exprimé en millimètre et ce paramètre varie dans la zone $5 < d < 55$ mm.

TSOUNKER a publié une relation plus complexe encore.

$$R = 1{,}55\, H \left(1 - \frac{0{,}95\, H}{4{,}9+H}\right) \sqrt{10^3\, d}$$

Comme dans la formule de PIKALOV, l'angle de tir est fixé à la valeur 32° et les variables R, H et d sont exprimées en mètres.

TANDA en 1957 propose une formule faisant intervenir le débit de l'asperseur :

$$R = I\,(46 - 32\,I)\,Q^{0,4}$$

Dans cette formule, I désigne le rapport $\frac{R}{H}$, les deux variables étant exprimées en mètres et Q le débit exprimé en m^3/h.

Mise à part la relation proposée par PIKALOV, nous constatons que les autres formules ne sont pas dimensionnellement homogènes, ce qui traduit le côté empirique de ces recherches diverses.

3. UNE THEORIE BALISTIQUE DES ASPERSEURS

Dans une communication intitulée "*Théorie Balistico-Statistique des Asperseurs d'Irrigation*" et parue dans le compte rendu des septièmes Journées de l'Hydraulique en juin 1962, SZALAY, Maître de Conférence à l'Université Technique de BUDAPEST, a établi, sur des bases théoriques cette fois, un abaque permettant de calculer la portée maximale d'une goutte de diamètre donné, connaissant son vecteur vitesse initiale.

SZALAY, dans sa théorie, reprend les hypothèses de calcul déjà mentionnées en 1958 par BILANSKY et KIDDER et exposées dans l'article déjà cité : "*Factors that Affect the Distribution of Water from a Medium Pressure Rotary Irrigation Sprinkler*".

La dynamique classique démontre que la trajectoire dans le vide d'un projectile soumis à une vitesse initiale V_o et lancé sous un angle de tir différent de 90° est une parabole. La portée maximale, toutes choses égales par ailleurs, est obtenue pour un angle de tir égal à 45°.

Les résultats expérimentaux précédents ont montré que la portée maximum était obtenue pour un angle de tir compris entre 30° et 35°. Cette divergence ne peut s'expliquer qu'en faisant intervenir les conditions atmosphériques ambiantes qui exercent une action marquée sur la portée, et le délicat problème du choix de la relation fonctionnelle susceptible de rendre compte de la résistance de l'air se pose immédiatement.

Les auteurs cités précédemment ont choisi de représenter la résistance de l'air par une fonction directement proportionnelle à la vitesse de la goutte :

$$\vec{R} = - C\vec{V}$$

SZALAY, dans sa théorie, indique que "cette hypothèse n'est strictement valable que pour les nombres de Reynolds inférieurs à 5, mais qu'en pratique, pour des nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à 60, on ne trouve que des déviations peu considérables".

Soit une goutte de masse m, supposée sphérique et indéformable le long de sa trajectoire et possédant un coefficient de résistance C.

Dans ces conditions, les coordonnées paramétriques de la trajectoire sont :

$$x(t) = \frac{m}{C} V_o \cos\alpha \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right)$$

$$y(t) = \left[\frac{m}{C} V_o \sin\alpha + g\left(\frac{m}{C}\right)^2\right] \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - \frac{m}{C} gt$$

L'auteur donne la relation exprimée dans le système CGS, liant C et le diamètre de la goutte de masse m :

$$\frac{m}{C} = 2{,}47\ d^2$$

Un chercheur américain, GREEN, dans un article intitulé "*A Phographic Technic for Measuring the Sizes and Velocities of Water drops from Irrigation Sprinklers*", paru en 1962, indique que le rapport $\frac{m}{C}$ varie de 0,90 pour une goutte de 3,92 mm de diamètre à 0,47 pour une goutte de 1,17 mm de diamètre.

Remarquons que GREEN, dans "*Evaluation of an Resistance to freely Folling drops of Water*" 1952, est lui aussi partisan de représenter la résistance de l'air par une fonction proportionnelle à la vitesse.

4. VITESSE TERMINALE DES GOUTTES

SEGINER, dans "*Tangential Velocity of Sprinklers Drops*", paru en 1965 (Transactions of the ASAE), fait une synthèse des résultats précédents et pense que l'analyse des résultats de LAWS, "*Measurement of Fall Velocity of Water Drops and Raindrops*", 1941, dont il sera question dans la suite de l'exposé, devrait conduire à considérer que la résistance de l'air est susceptible d'être représentée par une fonction en V^2.

Nous donnons les résultats chiffrés de cette étude, obtenus pour une pression hydraulique d'une atmosphère.

diamètre de la goutte mm	angle d'impact	vitesse à l'impact m/s	vitesse terminale m/s	vitesse minimum m/s
1,25	71°	4,3	4,9	3,4
2,00	63°	5,3	6,6	4,6
3,00	58°	6,2	8,1	5,6
4,00	55°	6,7	8,9	6,0
5,00	54°	7,0	9,3	6,2

CHAPITRE II

ETUDES RELATIVES A LA GRANULOMETRIE DES ASPERSEURS

Les physiciens de l'atmosphère et les météorologistes ont été les premiers à s'intéresser aux problèmes relatifs à la granulométrie des gouttes d'eau, à leur vitesse et à l'influence du milieu ambiant sur la cinématique de leur chute et sur leur déformation. Les études à ce sujet sont très nombreuses et intéressantes, surtout en ce qui concerne la dynamique des gouttes.

Depuis la naissance de l'irrigation par aspersion, ces problèmes se sont posés, mais dans une optique différente.

1. LES METHODES EXPERIMENTALES

Nous ne mentionnerons que les études effectuées afin de déterminer expérimentalement le diamètre des gouttes émises par un asperseur.

Plusieurs méthodes ont été imaginées, fondées sur des principes divers :

- détermination de la granulométrie par absorption des gouttes par une couche de suie, par un liquide visqueux ou par une couche de farine ;
- détermination de la granulométrie par des méthodes photographiques (*méthodes surtout employées par les physiciens de l'atmosphère*) ;
- détermination de la granulométrie par des mesures photométriques de la lumière absorbée par les trajectoires des gouttes ;
- détermination de la granulométrie par prise d'un échantillon à l'aide d'un capteur de gouttes ;
- détermination de la granulométrie par diverses autres méthodes.

1.1 En ce qui concerne l'étude de la granulométrie des asperseurs, BIELAYIEV et LEBEDIEV considèrent le procédé d'absorption des gouttes par de la farine comme étant le plus pratique.

On étend de la farine tamisée en une couche régulière de 1 à 2cm d'épaisseur dans une boîte plate en fer blanc et l'ensemble est pesé à 0,01 g près. La boîte est ensuite placée dans un étui dont le couvercle peut s'ouvrir et se fermer rapidement. Le couvercle est ouvert dans la zone arrosée et à la surface de la farine se déposent des gouttes. La boîte est pesée à nouveau. La différence des deux pesées donne la masse G de l'ensemble des gouttes tombées et le nombre de ces dernières est déterminé en comptant les impacts visibles à la surface de la farine.

La masse moyenne Gm des gouttes et leur diamètre moyen dm sont donnés par les relations :

$$Gm = \frac{G}{n} = \rho \ vm$$

$$dm = \sqrt[3]{\frac{6 \ vm}{\Pi}}$$

ρ désignant la masse spécifique de l'eau et vm le volume moyen des gouttes.

SEGINER, dans un article intitulé "*Water Distribution From Medium Pressure Sprinklers*", paru en juin 1963, décrit le procédé de la mesure du diamètre des gouttes à l'aide d'un papier filtre calibré sur lequel est répandue une suspension de bleu de méthylène dans du tétrachlorure de carbone. Quand une goutte tombe sur le papier, les cristaux de bleu de méthylène se dissolvent et une tache persistante peut être observée. Le papier filtre était calibré par l'Israel Meteorological Service et l'équation de calibrage était :

$$d = 0{,}444 \ D^{2/3} \quad \text{(papier WHATMAN n°1)}$$

Une variante de la méthode précédente consiste à prendre un papier filtre préalablement taré et teinté avec une poudre noire. Le diamètre des gouttes est mesuré par comparaison avec des impacts obtenus avec des gouttes calibrées.

1.2 Les méthodes photographiques ne prêtent pas à commentaires particuliers. Nous ne citerons que quelques auteurs ayant contribué à l'étude des gouttes à partir de ce procédé expérimental : WIESNER (1895), KILLIAN (1939), LAWS (1940, 1953), GUN et KINZER (1949), BLANCHARD (1950) SEGINER (1965).

1.3 Des méthodes photométriques ont été employées pour mesurer, assez grossièrement, semble-t-il, le diamètre moyen des gouttes d'une pluviométrie artificielle. Par temps ensoleillé, on peut observer un arc-en-ciel au travers de la population des gouttes émises par un asperseur. La luminosité et la largeur des bandes colorées dépendent de la quantité des gouttes et de leur diamètre. Plus les gouttes sont grosses et plus brillantes sont les bandes lumineuses de l'arc-en-ciel. Les observations ont montré que, pour des populations dont le diamètre est compris entre 0,5 et 1 mm, l'arc-en-ciel possède une bande verte très lumineuse et une bande bleue d'intensité lumineuse faible. Par contre si la population est constituée de gouttes dont le diamètre est inférieur à 0,3 mm, il se produit un arc-en-ciel avec une bande blanche nettement visible. Cette méthode cependant n'a pas fourni de résultats bien précis.

1.4 Le Centre de Recherches et d'Expérimentation de Génie Rural de Rabat a réalisé en 1961 un capteur destiné à l'étude des gouttes émises par un asperseur.

L'appareil se compose d'une table comportant une ouverture carrée de 2 dm^2. Latéralement, la table comporte des glissières assurant le guidage d'un obturateur. Sous l'ouverture se trouve fixé un récipient possédant un fond quadrillé. Les gouttes sont recueillies dans une huile dont la densité est très voisine de 1. L'obturateur en alliage léger comporte une ouverture de section carrée de 2 dm^2 et réglable par adjonction d'un cache. Un mécanisme permet le fonctionnement à distance de l'obturateur. Un appareil photographique équipé d'une bonnette et placé sous le récipient permet la prise de vue des gouttes.

1.5 Parmi les diverses autres méthodes imaginées pour mesurer la granulométrie, nous pouvons citer la mesure de la pression dynamique sur un écran dynamométrique. Cette méthode vise surtout à déterminer l'énergie cinétique d'un ensemble de gouttes afin de mesurer l'effet de compactage que fait subir à un sol l'irrigation par aspersion.

2. LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

2.1. RESULTATS QUALITATIFS

Les remarques suivantes se trouvent mentionnées dans la plupart des études relatives à la granulométrie des asperseurs :

- toutes choses égales par ailleurs, les gouttes les plus grosses tombent le plus loin ;
- la pulvérisation est d'autant plus fine que la pression hydraulique au niveau de l'ajutage est plus forte.

2.2. RESULTATS QUANTITATIFS

FROST et SCHWALEN dans "*Sprinkler Evaporation Losses*", estiment que la granulométrie d'un asperseur peut être liée à la distance de l'asperseur par une équation de la forme :

$$d = m^{r + n}$$

dans laquelle d désigne le diamètre des gouttes, r est la distance à partir de l'asperseur, m et n sont des constantes.

Les météorologistes donnent des résultats concernant le coefficient de trainée C_x en fonction du nombre de REYNOLDS et du nombre de WEBER ainsi que la vitesse limite des gouttes tombant en chute libre.

JENKINS, dans une étude intitulée "*The Acceleration of Water drops by an Airstream of Constant Relative Velocity*", propose une méthode pour estimer le coefficient de trainée dans le cas où la vitesse relative de l'air est suffisante pour perturber la forme des gouttes. L'étude a été conduite en faisant tomber des gouttes calibrées dans des conduits verticaux dans lesquels circulait de l'air à une vitesse déterminée. Nous donnons ci-après les résultats de l'étude de JENKINS.

Résultats de l'étude de JENKINS :

diamètre (mm)	nombre de Reynolds	nombre de Weber	C_x
0, 69	129, 5	0, 022	0, 973
0, 77	165, 8	0, 032	0, 829
0, 79	167, 9	0, 032	0, 871
2, 29	1.078	0, 459	0, 513
3, 38	1.886	0, 955	0, 539
4, 07	2.410	1, 291	0, 578
4, 42	2.685	1, 476	0, 597
4, 93	3.008	1, 658	0, 661
5, 42	3.360	1, 886	0, 701
5, 95	3.693	2, 075	0, 770
6, 24	3.833	2, 130	0, 823
6, 37	3.933	2, 200	0, 831
6, 67	4.130	2, 316	0, 865
7, 25	4.485	2, 514	0, 942

Dans une étude comparable, LAWS arrive aux résultats suivants :

diamètre (mm)	nombre de Weber	nombre de Reynolds	C_x
1, 25	4, 85	400	0, 580
1, 50	5, 51	550	0, 540
1, 75	6, 08	710	0, 515
2, 00	6, 58	880	0, 502
2, 25	7, 02	1.060	0, 499
2, 50	7, 41	1.240	0, 495
2, 75	7, 76	1.430	0, 499
3, 00	8, 06	1.620	0, 503
3, 25	8, 31	1.800	0, 513
3, 50	8, 52	1.990	0, 527
3, 75	8, 71	2.180	0, 538
4, 00	8, 86	2.370	0, 557
4, 50	9, 10	2.740	0, 591
5, 00	9, 25	3.090	0, 640
5, 50	9, 30	3.420	0, 692
6, 00	9, 30	3.730	0, 753

3. CRITIQUE DE LA BIBLIOGRAPHIE

La loi de STOKES ne s'applique en toute rigueur que pour des nombres de REYNOLDS très faibles.

Le phénomène de l'aspersion fait intervenir des vitesses initiales largement supérieures à celles qui en permettent l'utilisation.

Il faut attendre 1965 pour qu'apparaisse dans la littérature technique l'hypothèse de la représentation de la résistance de l'air par une fonction proportionnelle au carré de la vitesse, dans le domaine de recherche qui nous occupe.

Il faut remarquer cependant que les études entreprises n'ont eu pour but que de permettre de rendre compte grossièrement du phénomène de l'aspersion. Les techniques de l'ingénieur s'accomodent souvent de formules empiriques, mais d'un emploi facile et limité, et c'est la raison primordiale, nous semble-t-il, qui a prévalu pour choisir l'hypothèse physiquement fausse, mais conduisant à des résultats mathématiques commodes, de la fonction de la résistance de l'air, utilisée jusqu'à présent.

Les physiciens de l'atmosphère, par contre, ont permis, par leurs études, de mieux connaître le coefficient de trainée des gouttes et ont rendu sa comparaison possible avec celui des sphères étudié en aérodynamique.

L'esprit de notre travail découle fondamentalement de ces remarques et n'a pour but en définitive que de proposer une théorie balistique des asperseurs plus cohérente physiquement, qui permette, s'il est possible, d'y inclure les résultats expérimentaux trouvés par les météorologistes.

DEUXIEME PARTIE

THEORIE BALISTIQUE DES ASPERSEURS

CHAPITRE I

AERODYNAMIQUE DES GOUTTES

Dans ce chapitre, nous allons tenter de justifier le choix de la fonction représentant la force résistante qu'oppose le milieu ambiant aux gouttes.

L'expérience montre en effet qu'un corps en mouvement subit toujours, de la part d'un fluide présentant une certaine viscosité, une résistance qui s'oppose à ce mouvement.

NEWTON, par un raisonnement qualitatif, a donné la relation suivante :

$$R = K \rho' S V^2 \qquad (1)$$

Dans cette formule, ρ' désigne la masse volumique du fluide, V désigne la vitesse du corps en mouvement dans le fluide, S désigne le maître-couple du corps, K est un coefficient sans dimension.

Nous constatons que cette expression ne tient pas compte de la forme du corps et comme elle est générale, aucun argument théorique ne nous empêche de l'utiliser pour des gouttes qui sont des corps particuliers.

Soit un élément de surface pris sur une goutte. Sur cet élément agit une force de contact qui peut toujours être décomposée en une composante tangentielle et une composante normale à l'élément de surface considéré. La composante normale est une force de pression et la composante tangentielle une force de frottement.

Nous définissons la résistance de pression en considérant la composante de la résultante des forces de pression prise suivant la direction du vecteur vitesse.

De même, nous définissons la résistance de frottement en considérant la composante suivant la direction du vecteur vitesse de la résultante des forces de frottement.

Les forces de frottement sont essentiellement dues à la viscosité du fluide ambiant.

Les forces de pression ont une répartition qui se rapproche de celle qui existe dans un fluide parfait, à condition toutefois que la couche limite soit de faible épaisseur et ne se décolle pas.

Le système des forces de résistance qui s'applique sur une goutte peut se réduire à une force $\vec{F}$ et à un couple $\vec{C}$. En décomposant la force $\vec{F}$ parallèlement et perpendiculairement au vecteur vitesse, nous définissons la résistance de trainée $\vec{T}$ et la portance $\vec{P}$.

L'analyse dimensionnelle conduit à écrire :

$$(2) \qquad \left|\vec{F}\right| = \rho' V^2 L^2 f(\mathscr{R})$$

Dans cette expression, L désigne une dimension linéaire caractéristique de la goutte et $\mathscr{R}$ le nombre de REYNOLDS qui caractérise l'écoulement. Le nombre de REYNOLDS a pour expression :

$$(3) \qquad \mathscr{R} = \frac{VL}{\nu}$$

ν désignant la viscosité cinématique du fluide exprimée en cm^2/s dans le système CGS.

Le nombre de REYNOLDS traduit l'importance relative des forces d'inertie et des forces dues à la viscosité. Un nombre de REYNOLDS élevé indique que les forces d'inertie sont prépondérantes par rapport aux forces dues à la viscosité.

Compte tenu de (2), nous pouvons écrire d'une manière générale :

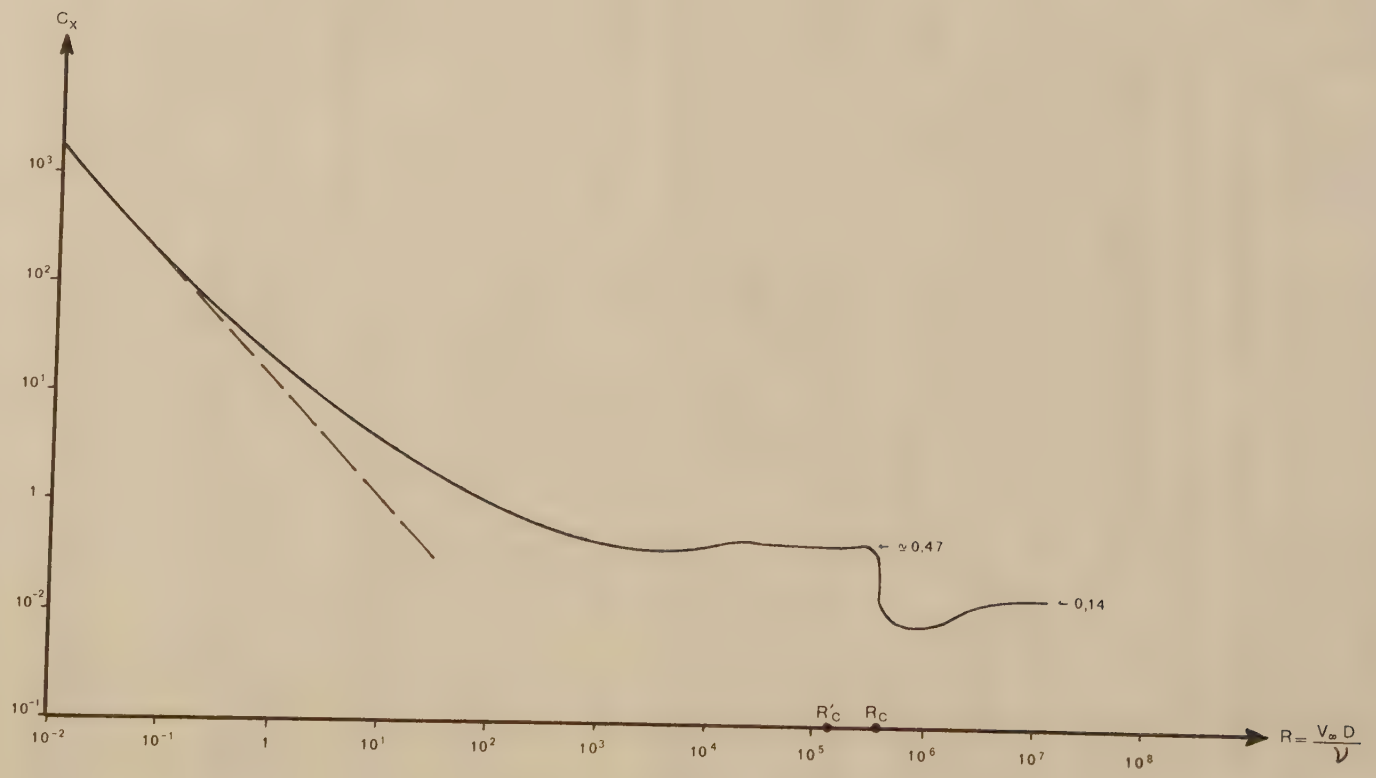
$$(4) \qquad \begin{cases} \left|\vec{T}\right| = \frac{1}{2} C_x \rho' S V^2 \\ \left|\vec{P}\right| = \frac{1}{2} C_z \rho' S V^2 \end{cases}$$

Dans les expressions (4), S désignant le maître-couple est homogène à L^2. Les coefficients C_x et C_z désignés respectivement sous le nom de coefficient de trainée et de coefficient de portance sont des nombres sans dimension d'après (2), en identifiant terme à terme les expressions. Le coefficient $\frac{1}{2}$ placé dans les formules (4) résulte uniquement de l'usage.

Pour les fluides compressibles, les coefficients C_x et C_z sont en outre fonction du nombre de MACH, du nombre de PRANDTL et du rapport des chaleurs massiques :

$$\mathscr{M} = \frac{V}{a} \qquad \mathscr{P} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Variations du cœfficient de trainée C_x d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds



Cependant, pour simplifier, nous supposerons dans le reste de l'étude que C_x et C_z ne dépendent que du nombre de REYNOLDS, le milieu ambiant étant supposé n'être pas trop perturbé par le passage des gouttes.

Les gouttes, durant leur mouvement présentent un axe de symétrie et nous pouvons en première approximation les considérer comme sphériques. Aussi nous a-t-il semblé bon de rappeler les résultats expérimentaux obtenus sur les sphères.

Dans le cas particulier des sphères, l'écoulement doit présenter un axe de symétrie et les forces de résistance se réduisent, semble-t-il, à la seule trainée $\vec{T}$.

$$(5) \qquad C_x = \frac{\left|\vec{T}\right|}{\frac{1}{2}\,\rho'\,S\,V^2}$$

Le coefficient C_x peut prendre différentes valeurs en fonction du nombre de REYNOLDS.

a) $\mathscr{R}<1$

Nous sommes dans la zone des écoulements rampants et STOKES a déterminé les relations :

$$(6) \qquad \left|\vec{T}\right| = 3\Pi\,\mu\,D\,V$$
$$C_x = \frac{24}{\mathscr{R}}$$

D désignant le diamètre de la sphère et μ la viscosité dynamique du fluide. La relation que STOKES avait trouvé en 1850 négligeait les forces d'inertie devant les forces de viscosité. En 1910, OSEEN, ayant tenu compte des forces d'inertie, a proposé la relation plus complexe suivante :

$$(7) \qquad C_x = \frac{24}{\mathscr{R}}\left(1 + \frac{3}{16} + \ldots.\right)$$

Ce qu'il faut retenir c'est que le coefficient C_x est une fonction décroissante de $\mathscr{R}$, mais que pour $\mathscr{R} = 1$, C_x diminue moins vite que ne l'indique la loi de STOKES.

b) $4<\mathscr{R}<10$

La couche limite se décolle vers l'arrière de la sphère et il se forme un tourbillon torique centré sur celle-ci. Le coefficient C_x ne peut plus être déterminé théoriquement, mais l'expérience montre que C_x continue à décroître, la décroissance étant de plus en plus lente au fur et-à-mesure que le tourbillon augmente de volume jusqu'à occuper toute la partie arrière de la sphère, phénomène qui se produit pour $\mathscr{R}$ voisin de 10.

c) $\mathscr{R} = 100$

Il n'existe plus d'écoulement régulier à l'aval de la sphère. Il se forme un sillage. Quand $\mathscr{R}$ augmente, le sillage persiste et C_x se stabilise vers la valeur :

$$C_x = 0,45$$

INGEBO a proposé une formule empirique valable dans la zone $4 < \mathscr{R} < 500$

$$C_x = \frac{27}{\mathscr{R}^{0,84}}$$

d) $500 < \mathscr{R} < \mathscr{R}_c$

La valeur $\mathscr{R}_c$ critique du nombre de REYNOLDS est comprise entre 10^5 et 10^6. Pour $\mathscr{R} < \mathscr{R}_c$, la valeur de C_x est comprise entre :

$$0,44 < C_x < 0,47$$

Pour la valeur $\mathscr{R}_c$, C_x subit une chute plus ou moins forte

$$C_x = 0,1$$

e) $\mathscr{R} > \mathscr{R}_c$

Le coefficient de trainée remonte légèrement et se stabilise à la valeur :

$$C_x = 0,14$$

Tous ces résultats ont été rassemblés sur un graphique à coordonnées logarithmiques.

Pour l'étude qui nous intéresse, nous devons mentionner le phénomène des interactions.

Quand plusieurs obstacles sont placés au voisinage l'un de l'autre dans le même écoulement, il se produit des phénomènes d'influence réciproque, les forces qui s'exercent sur chacun des corps étant modifiées par la présence des corps situés autour de lui. Il faut étudier l'écoulement de cet ensemble comme un corps nouveau.

CONCLUSION

Choix des hypothèses

- la force de résistance de l'air sera prise comme étant proportionnelle au carré de la vitesse et sera notée dans ce qui suit

$$\left|\vec{R}\right| = A\ V^2 \text{ avec}$$

$$A = \frac{1}{2}\ C_x\ \rho'\ S$$

- nous supposerons les gouttes sphériques ;
- nous supposerons que l'écoulement est tel que C_x est uniquement fonction du nombre de REYNOLDS ;
- nous conviendrons de dire à la fin de l'étude que le coefficient C_x trouvé, correspond à l'ensemble des gouttes qui tombent en un lieu donné.

CHAPITRE II

DYNAMIQUE DES GOUTTES

Le chapitre précédent nous a conduit à considérer les gouttes issues d'un asperseur comme étant des corps en suspension dans un fluide particulier.

1. EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE GOUTTE

Les forces exercées sur une goutte sont de deux sortes :

- la force de pesanteur appliquée au centre de gravité de la goutte

$$(1) \qquad -\rho V g \overrightarrow{\text{grad}} Z$$

où Z désigne la cote du centre de gravité G de la goutte

- les forces exercées par le fluide sur la surface de la goutte.

Pour tenter d'expliciter mathématiquement ces forces de surface, nous supposerons que les contraintes en un point M du fluide ambiant, proche de la surface de la goutte, sont égales aux contraintes en un point M' voisin de M et situé sur la surface de la goutte. Les contraintes en un point M d'un fluide sont définies par le tenseur :

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$t_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$t_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

u_i désigne la projection du vecteur vitesse de la goutte sur l'axe ox_i d'un repère fixe orthonormé,

μ désigne la viscosité dynamique de l'air,

p désigne la pression de l'air au voisinage immédiat de la goutte.

En écrivant les composantes de la diagonale principale du tenseur sous la forme suivante :

$$(3) \qquad t_{ii} = -\,(\,p + \rho' g Z) + 2\,\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho' g Z$$

le tenseur précédent se décompose en la somme de deux tenseurs :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho' g Z & 0 & 0 \\ 0 & \rho' g Z & 0 \\ 0 & 0 & \rho' g Z \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} s_{ii} = -\,(p + \rho' g Z) + 2\,\mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \\ s_{ij} = t_{ij} \end{cases}$$

Orientons la normale à un élément de surface de la goutte de l'intérieur vers l'extérieur.

La résultante des forces de surface exercées par l'air sur la goutte peut s'écrire en désignant par S la surface totale de la goutte.

$$(5) \quad \vec{R} = -\iint_S [s]\, dS + \iint_S \rho' g Z\, dS$$

L'expression $\iint_S \rho' g Z\, dS$ n'est autre que la poussée d'Archimède qu'exerce l'air sur la goutte.

$$(6) \quad \iint_S \rho' g Z\, dS = \rho' v g$$

L'équation du centre de gravité projetée sur l'axe ox_i s'écrit

$$(7) \quad \rho v \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\,\rho v g \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \iint_S [s]_{x_i} dS + \rho' v g \frac{\partial Z}{\partial x_i}$$

soit encore

$$(8) \quad \rho v \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\,(\rho - \rho') v g \frac{\partial z}{\partial x_i} - \iint_S [s]_{x_i} dS$$

Proposons-nous de mettre l'équation (8) sous forme adimensionnelle.

Désignons par $\mathscr{L}$ l'unité de longueur. Si x désigne une longueur, l'expression

$$\mathscr{X} = \frac{x}{\mathscr{L}} \qquad \text{est sans dimensions.}$$

Désignons par $\mathscr{V}$ l'unité de vitesse. Si t désigne un temps, l'expression

$$\mathscr{T} = t\ \frac{\mathscr{V}}{\mathscr{L}} \qquad \text{est sans dimensions.}$$

Dans ces conditions, l'expression

$$\frac{d^2\,\mathscr{X}_i}{d\,\mathscr{T}^2} = \frac{\mathscr{L}}{\mathscr{V}^2}\ \frac{d^2\,x_i}{dt^2} \quad \text{est sans dimensions.}$$

La goutte étant caractérisée par une dimension linéaire $\mathscr{D}$, l'expression

$$U = \frac{v}{\mathscr{D}^3} \qquad \text{est sans dimensions.}$$

De même

$$d\,\mathscr{S} = \frac{dS}{\mathscr{D}^2} \qquad \text{est sans dimensions.}$$

Les contraintes $[s]$ étant homogènes à des pressions, donc à $\rho'\mathscr{V}^2$, l'expression

$$[\sigma]_{\mathscr{X}_i} = \frac{[s]_{x_i}}{\rho'\mathscr{V}^2} \qquad \text{est sans dimensions.}$$

L'expression (8) s'écrit en définitive :

$$U\ \frac{d^2\mathscr{X}_i}{d\mathscr{T}^2} = \frac{g\mathscr{L}}{\mathscr{V}^2}\ U\ \frac{\partial z}{\partial \mathscr{X}_i}\ \frac{(\rho - \rho')}{\rho} - \frac{\rho'\mathscr{L}}{\rho\,\mathscr{D}} \iint_{\mathscr{S}} [\sigma]_{\mathscr{X}_i}\ d\mathscr{S}$$

et fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

- le nombre de REECH-FROUDE $\mathscr{F} = \dfrac{\mathscr{V}^2}{g\mathscr{L}}$
- le rapport des masses volumiques du fluide et des gouttes $\dfrac{\rho'}{\rho}$
- le rapport $\dfrac{\mathscr{L}}{\mathscr{D}}$ caractérisant les corps en mouvement par rapport à un repère fixe

- le nombre de REYNOLDS $\frac{\mathscr{V}\mathscr{L}}{\nu}$ car

$[\sigma]_{\mathscr{X}_i}$ comprend deux sortes de termes

a) des termes de la forme $- p + \frac{2\mu}{\rho \mathscr{V}\mathscr{L}} \frac{\partial \mathscr{V}_i}{\partial \mathscr{X}_i}$

b) des termes de la forme $\frac{\mu}{\rho \mathscr{V}\mathscr{L}} \left[\frac{\partial \mathscr{V}_i}{\partial \mathscr{X}_j} + \frac{\partial \mathscr{V}_j}{\partial \mathscr{X}_i} \right]$

2. CONCLUSION

Nous constatons dans cette étude hydrodynamique, que les forces de volume, c'est-à-dire la pesanteur et la poussée d'Archimède, font intervenir le nombre de REECH-FROUDE.

Par contre, les forces de surface font intervenir le nombre de REYNOLDS.

Comme le problème essentiel est le choix d'une représentation mathématique simple susceptible de rendre compte des forces de résistance qui sont des forces de surface, et qu'elles font intervenir le nombre de REYNOLDS, nous rejoignons là,par une autre voie, une des conclusions du chapitre précédent.

En conséquence, c'est le nombre de REYNOLDS qui sera notre nombre directeur.

Les hypothèses utilisées dans ce chapitre ne faisant pas intervenir la tension superficielle des gouttes, il est normal de ne pas voir figurer le nombre de WEBER dans les équations sans dimensions.

En conclusion de l'étude concernant la granulométrie, nous calculerons cependant le nombre de WEBER qui nous permettra de tester l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de capillarité.

CHAPITRE III

ETUDE MATHEMATIQUE DE LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS

1. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT

Nous allons traduire la loi fondamentale de la dynamique

$$\rho v \vec{\Gamma} = \sum \vec{F}_e$$

rapportée au trièdre orthonormé de référence (o, x, y, z) défini comme suit :

- l'axe de l'ajutage de l'asperseur est dans le plan x o z ;

- l'origine des axes se trouve au centre de gravité de l'orifice de l'ajutage de l'asperseur ;

- le plan x o y est horizontal.

L'axe de l'ajutage de l'asperseur et le plan x o y définissent sans ambiguïté, l'angle de tir α.

Dans les calculs qui suivent, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

- l'asperseur est fixe ;

- les gouttes sont supposées sphériques et réduites à leur centre de gravité ;

- le vecteur résistance de l'air est colinéaire au vecteur vitesse et a pour module :

$$\left|\vec{R}\right| = A \dot{V}^2$$

- le terme A est supposé constant durant tout le mouvement ;

- les gouttes sont supposées formées dès la sortie de l'ajutage.

Etude mathématique de la balistique des asperseurs

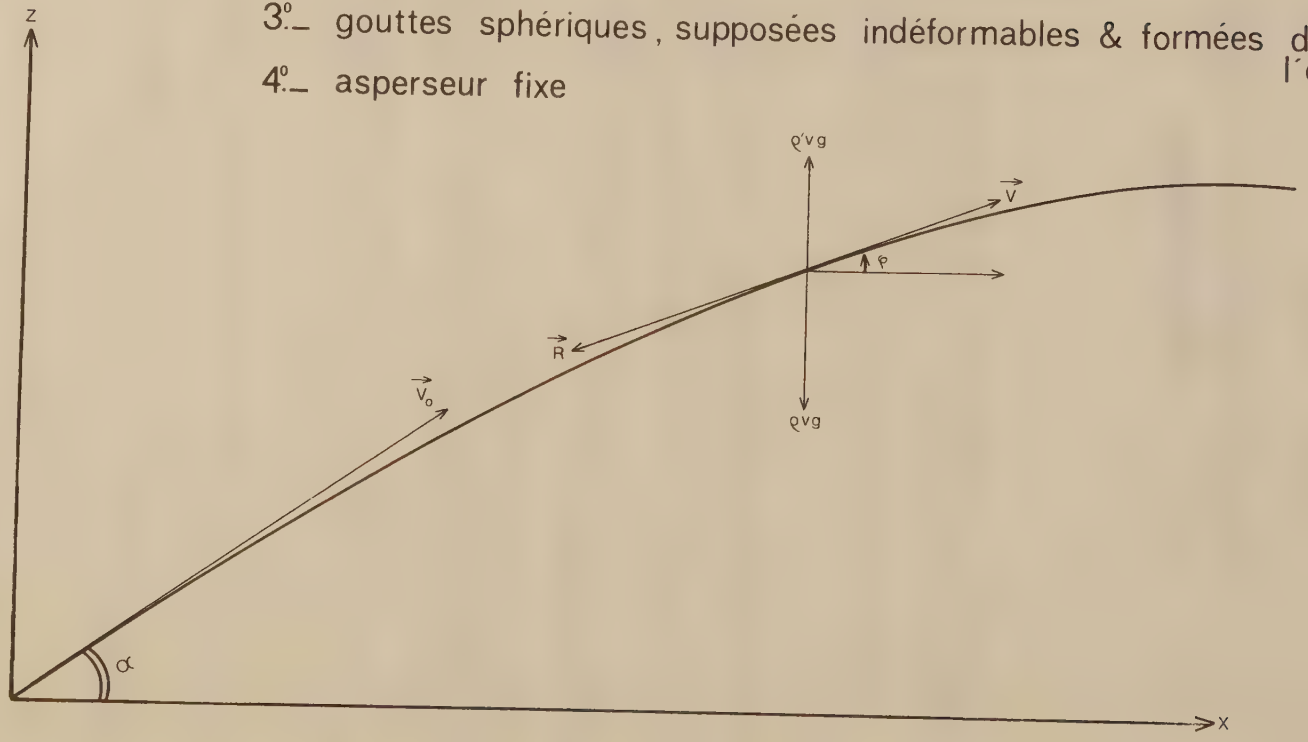
Hypothèses :

1°_ résistance de l'air : $|\vec{R}| = \frac{1}{2} C_x \rho' S V^2$

2°_ $A = \frac{1}{2} C_x \rho' S = cst.$ durant tout le mouvement

3°_ gouttes sphériques, supposées indéformables & formées dès l'origine

4°_ asperseur fixe



Dans ces conditions, les équations différentielles du mouvement, projetées sur les trois axes du trièdre de référence sont :

$$(1)\quad \begin{cases} \rho v \dfrac{d^2x}{dt^2} = - A V^2 \cos \Phi \\ \rho v \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \rho v \dfrac{d^2z}{dt^2} = - (\rho - \rho') vg - A V^2 \sin \Phi \end{cases}$$

Φ désignant l'angle orienté $(\vec{ox}, \vec{V})$

La deuxième équation différentielle du système (1) montre que la trajectoire est plane.

En tenant compte des deux expressions suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \Phi, \quad \frac{dz}{dt} = V \sin \Phi$$

et en les différenciant, la première et la troisième équations différentielles du système (1) s'écrivent :

$$(2)\quad \begin{cases} \rho v \left(\dfrac{dV}{dt} \cos \Phi - V \sin \Phi \dfrac{d\Phi}{dt}\right) = - A V^2 \cos \Phi \\ \rho v \left(\dfrac{dV}{dt} \sin \Phi + V \cos \Phi \dfrac{d\Phi}{dt}\right) = - (\rho - \rho') vg - A V^2 \sin \Phi \end{cases}$$

Multiplions la première équation du système (2) par cos Φ et la deuxième par sin Φ et ajoutons membre à membre ; il vient :

$$\rho v \frac{dV}{dt} = -A V^2 - (\rho - \rho') vg \sin \Phi$$

Multiplions la première équation du système (2) par - sin Φ et la deuxième par cos Φ et ajoutons membre à membre ; il vient :

$$\rho\, vV \frac{d\Phi}{dt} = - (\rho - \rho') vg \cos \Phi$$

Nous obtenons le système (3)

$$(3)\quad \begin{cases} \rho v \dfrac{dV}{dt} = - A V^2 - (\rho - \rho') vg \sin \Phi \\ \rho v V \dfrac{d\Phi}{dt} = - (\rho - \rho') vg \cos \Phi \end{cases}$$

Eliminons le temps en divisant membre à membre les deux équations du système (3).

Nous obtenons l'équation différentielle du mouvement

$$(4) \quad \frac{dV}{V d\Phi} = tg\Phi + \frac{A V^2}{(\rho - \rho') vg \cos \Phi}$$

2. EQUATION DE L'HODOGRAPHE DU MOUVEMENT

Deux méthodes sont proposées pour intégrer l'équation différentielle (4).

C'est LEGENDRE qui le premier a résolu cette équation différentielle suivant la méthode exposée ci-après.

Nous exposerons ensuite une seconde méthode qui présente l'avantage d'être moins artificielle.

a) Méthode de LEGENDRE

Divisons par V^2 les deux membres de l'équation (4) et remarquons qu'il est possible d'écrire

$$\frac{dV}{V^3} = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{V^2}\right)$$

L'équation (4) s'écrit dans ces conditions :

$$(5) \quad d\left(\frac{1}{V^2}\right) + 2 \frac{tg\Phi}{V^2} d\Phi + \frac{2 A}{(\rho - \rho') vg \cos \Phi} d\Phi = 0$$

Effectuons alors le changement de variable $\frac{1}{V^2} = pq$, p et q étant des fonctions de Φ.

L'équation (5) se transforme en (6)

$$(6) \quad q\,dp + p\,(dq + 2q\,tg\Phi\,d\Phi) + \frac{2 A}{(\rho - \rho') vg \cos \Phi} d\Phi = 0$$

Déterminons la fonction q de façon que le coefficient de p soit nul dans l'équation (6). Nous avons dans ces conditions à résoudre l'équation différentielle à variables séparables suivante :

$$dq + 2q\,tg\Phi\,d\Phi = 0$$

dont la solution est

$$q = \cos^2\Phi$$

L'équation (6) devient alors :

$$dp = - \frac{2\,A}{(\rho - \rho')\, vg \cos^3\Phi}\, d\Phi$$

soit

$$p = p_o - \frac{2\,A}{(\rho - \rho')\, vg} \int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$$

Les conditions à l'origine ($V = V_o$, $\cos\Phi = \cos\alpha$) imposent à p_o la valeur

$$p_o = \frac{1}{V_o^2 \cos^2\alpha}$$

La solution de l'équation différentielle (4) s'écrit :

$$\frac{1}{V^2} = \cos^2\Phi \left(\frac{1}{V_o^2 \cos^2\alpha} - \frac{2\,A}{(\rho - \rho')\, vg} \int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi} \right)$$

Explicitons $\int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$

$$\int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\Phi}{\cos^2\Phi} + \text{Arg sh } (\text{tg } \Phi) \right]_\alpha^\Phi$$

Pour simplifier les écritures, nous poserons

$$F(\Phi) = 2 \int_o^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$$

L'équation de l'hodographe du mouvement s'écrit alors

$$(7) \quad \frac{1}{V^2 \cos^2\Phi} + \frac{A}{(\rho - \rho')\, vg} F(\Phi) = \frac{1}{V_o^2 \cos^2\alpha} + \frac{A}{(\rho - \rho')\, vg} F(\alpha)$$

b) <u>Deuxième méthode d'intégration</u>

Cette méthode est basée sur le fait que l'équation (4) peut s'écrire.

$$(8) \quad \frac{d\,(V \cos\Phi)}{V d\Phi} = \frac{A\, V^2}{(\rho - \rho')\, vg}$$

Effectuons alors le changement de variable $V \cos\Phi = u$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre à variables séparables (9):

$$(9) \quad \frac{du}{u^3} = \frac{A}{(\rho - \rho') vg} \quad \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$$

L'équation (9) s'intègre sans difficulté et après retour à la variable originelle et compte tenu des notations précédemment mentionnées, nous retrouvons l'équation (7). Cette seconde méthode d'intégration a l'avantage d'être plus rapide que la méthode proposée par LEGENDRE.

3. ETUDE DE L'HODOGRAPHE

3.1 INTERVALLE DE VARIATION

La variable Φ varie de α à $-\frac{\Pi}{2}$

Dans cet intervalle, la fonction $V(\Phi)$ est définie et continue.

3.2 VITESSE MINIMALE

La vitesse passe par une valeur minimale pour la valeur de V telle que :

$$\frac{dV}{d\Phi} = 0$$

L'équation différentielle (4) nous donne la relation qui lie V et Φ dans ce cas particulier, à savoir :

$$(10) \quad \frac{A}{(\rho - \rho') vg} V^2 = - \sin \Phi$$

L'étude de l'équation (10) montre que $V(\Phi)$ est minimale pour une valeur de Φ comprise entre o et $-\frac{\Pi}{2}$.

Cet intervalle correspond à la branche descendante de la trajectoire de la goutte.

Nous supposons bien entendu $\alpha \neq \frac{\Pi}{2}$, cas particulier du tir vertical, où la vitesse s'annule pour $\Phi = 0$.

Pour obtenir la valeur de l'angle Φ qui rend V minimale, il suffit d'éliminer V^2 entre les équations (7) et (10). Il vient :

$$(11) \quad \frac{(\rho - \rho') vg}{A V_o^2 \cos^2\alpha} + F(\alpha) = \text{Arg sh } (\text{tg}\Phi) - \frac{1}{\sin\Phi}$$

La résolution de l'équation (11) s'effectue rapidement par une méthode graphique en utilisant la fonction $G(\Phi)$ définie ci-après :

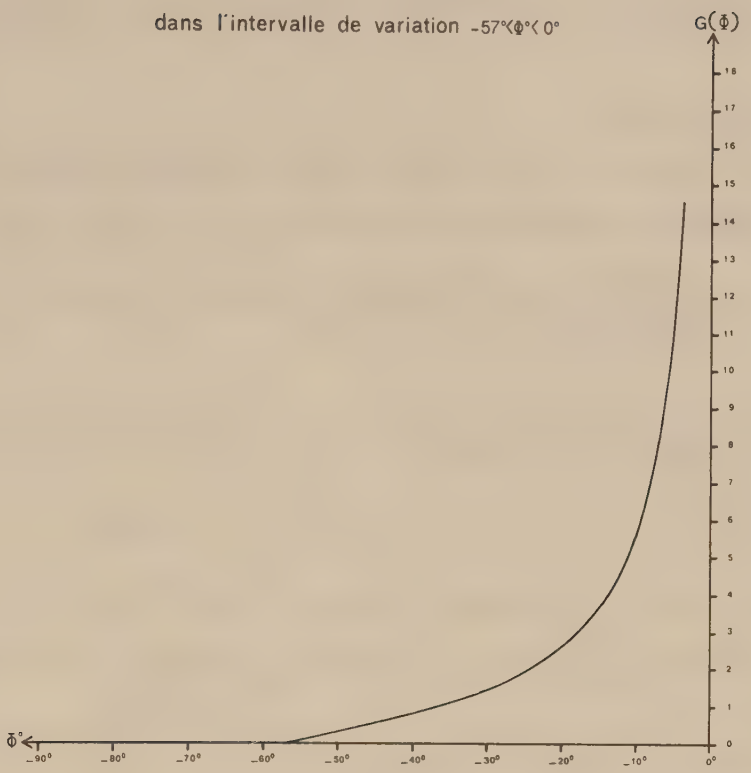
$$G(\Phi) = \text{Arg sh } (\text{tg}\Phi) - \frac{1}{\sin\Phi}$$

que nous avons tabulée.

Courbe représentative de la fonction

$$G(\Phi) = \text{Arg. sh.}(\text{tg}\Phi) - \frac{1}{\sin\Phi}$$

dans l'intervalle de variation $-57° < \Phi° < 0°$



$$G(\varphi) = \text{Arg sh}(\text{tg}\,\varphi) - \frac{1}{\sin\varphi}$$

φ	$G(\varphi)$	φ	$G(\varphi)$
0°	∞	- 30°	1, 45069
- 1°	57, 28123	- 31°	1, 37204
- 2°	28, 61879	- 32°	1, 29704
- 3°	19, 05494	- 33°	1, 22535
- 4°	14, 26571	- 34°	1, 15663
- 5°	11, 38613	- 35°	1, 09061
- 6°	9, 46186	- 36°	1, 02702
- 7°	8, 08303	- 37°	0, 96565
- 8°	7, 04521	- 38°	0, 90628
- 9°	6, 23472	- 39°	0, 84872
- 10°	5, 58334	- 40°	0, 79281
- 11°	5, 04766	- 41°	0, 73839
- 12°	4, 59874	- 42°	0, 68531
- 13°	4, 21654	- 43°	0, 63343
- 14°	3, 88675	- 44°	0, 58265
- 15°	3, 59886	- 45°	0, 53284
- 16°	3, 34500	- 46°	0, 48390
- 17°	3, 11914	- 47°	0, 43569
- 18°	2, 91661	- 48°	0, 38816
- 19°	2, 73369	- 49°	0, 34120
- 20°	2, 56742	- 50°	0, 29472
- 21°	2, 41541	- 51°	0, 24863
- 22°	2, 27569	- 52°	0, 20285
- 23°	2, 14664	- 53°	0, 15730
- 24°	2, 02680	- 54°	0, 11189
- 25°	1, 91532	- 55°	0, 06654
- 26°	1, 81096	- 56°	0, 02116
- 27°	1, 71296	- 57°	0, 02431
- 28°	1, 62066		
- 29°	1, 53340		

3.3 VITESSE A L'ORIGINE

Les conditions à l'origine donnent $\Phi = \alpha$, $V = V_o$.

3.4 VITESSE LIMITE

Pour Φ tendant vers $-\frac{\Pi}{2}$, nous allons démontrer à partir de l'équation (7) que la vitesse tend vers une limite :

$$\frac{1}{V^2} = \frac{\cos^2\Phi}{V_o^2 \cos^2\alpha} + \frac{A}{(\rho - \rho') vg} \cos^2\Phi \quad \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]$$

Dans ces conditions $\cos\Phi \to 0$ et nous sommes conduits à étudier la limite de l'expression $\cos^2\Phi \cdot F(\Phi)$

$$\cos^2\Phi F(\Phi) = \sin\Phi + \cos^2\Phi \log_e \left(\operatorname{tg}\Phi + \frac{1}{\cos\Phi}\right)$$

$$\cos^2\Phi F(\Phi) \to -1 + \cos^2\Phi \log_e 2 - \cos^2\Phi \log_e \cos\Phi$$

$\cos^2\Phi \log_e \cos\Phi$ tend vers zéro d'après le théorème classique :

$x^m (\log_e x)^p \to o$ si m et p $> o$ et $x \to o$

En définitive, quand $\Phi \to -\frac{\Pi}{2}$

$$F(\Phi) \cos^2\Phi \to -1$$

Par suite, V tend vers la limite

$$V\infty = \sqrt{\frac{(\rho - \rho') vg}{A}}$$

Montrons que cette expression est homogène à une vitesse.

Le terme A a pour expression (cf. chap.1) :

$$A = \frac{1}{2} C_x \rho' S$$

C_x est un nombre pur,

ρ' est homogène à ML^{-3},

S est homogène à L^2,

nous en déduisons que A est homogène à ML^{-1}

$(\rho - \rho') vg$ est homogène à MLT^{-2}

par suite :

$\sqrt{\frac{(\rho - \rho') vg}{A}}$ est homogène à LT^{-1} donc à une vitesse.

3.5 VITESSE AU SOMMET DE LA TRAJECTOIRE

Au sommet de la trajectoire, c'est-à-dire au point où $\Phi = o$, la vitesse a pour expression :

$$V_s = V_o \cos\alpha \sqrt{\frac{(\rho - \rho') vg}{(\rho - \rho') vg + AV_o^2 \cos^2\alpha F(\alpha)}}$$

Nous pouvons résumer dans un tableau les conclusions de l'étude de l'hodographe.

Φ	α	0	$-\Phi_m$	$-\frac{\Pi}{2}$
$\frac{dV}{d\Phi}$	−	−	0	+
V	V_o ↘	V_s ↘	V_m ↗	V_∞

3.6 DETERMINATION GRAPHIQUE DE LA VITESSE AU SOMMET DE LA TRAJECTOIRE

Au sommet de la trajectoire, nous avons la relation suivante :

$$1 = \frac{V_s^2}{V_o^2 \cos^2\alpha} + \frac{V_s^2 F(\alpha)}{V_\infty^2} \quad (1)$$

Posons $V_s^2 = x$, $V_s^2 F(\alpha) = y$, $V_o^2 \cos^2\alpha = a$ et $V_\infty^2 = b$

L'équation (1) représente une droite dans un système orthonormé.

Traçons le segment OA tel que $(\vec{OX}, \vec{OA}) = \alpha$ et $OA = V_o^2$

Dans ces conditions $OB = V_o^2 \cos\alpha$

$$OC = V_o^2 \cos^2\alpha$$

A l'aide d'un compas portons sur l'axe OX OC = OC′ = a.

Sur l'axe OY portons OD = V_∞^2 = b

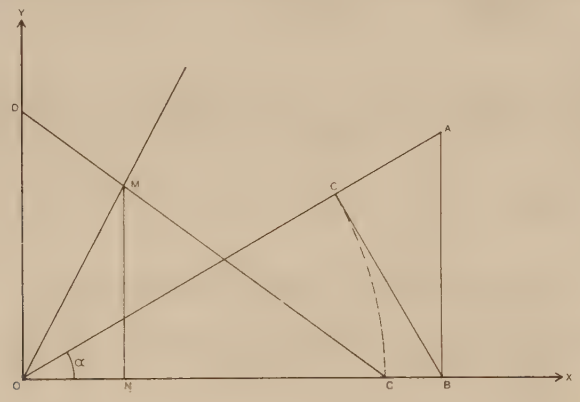
Traçons la droite DC′ représentative de l'équation (1)

Traçons la droite y = F (α) x

Les deux droites se coupent en M. Projetons M sur l'axe des x. Soit N.

En définitive ON = V_s^2

Détermination graphique de la vitesse au sommet de la trajectoire.



4. RECTIFICATION DE LA TRAJECTOIRE

L'élément dS de la trajectoire est lié à la vitesse et au temps par la relation :

$$(13) \quad ds = V\,dt$$

Eliminons le temps dt entre l'expression précédente et la deuxième équation différentielle du système (3). Nous obtenons l'équation (14).

$$(14) \quad ds = -\frac{\rho V^2}{g\,(\rho - \rho')}\,\frac{d\Phi}{\cos\Phi}$$

qui en explicitant V^2 s'écrit encore

$$S_\alpha^\Phi = -\frac{\rho v}{A}\int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi\left[\frac{(\rho - \rho')\,vg}{A\,V_o^2\cos^2\alpha} + F(\alpha) - F(\Phi)\right]}$$

L'intégration de l'expression (14) est immédiate en remarquant que

$$\frac{1}{2}\,d\left[F(\Phi)\right] = \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$$

Par suite

$$(15) \quad S_\alpha^\Phi = \frac{\rho v}{2A}\log_e\left\{1 + \frac{A\,V_o^2\cos^2\alpha}{(\rho - \rho')vg}\left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]\right\}$$

qui peut s'écrire encore

$$S_{\alpha}^{\Phi} = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left\{ 1 + \left(\frac{V_o}{V_\infty}\right)^2 \cos^2\alpha \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right] \right\}$$

L'expression

$$1 + \left(\frac{V_o}{V_\infty}\right)^2 \cos^2\alpha \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right]$$

étant sans dimensions

et le terme $\frac{\rho v}{2A}$ étant homogène à une longueur puisque

ρ est homogène à ML^{-3},
v est homogène à L^3,
A est homogène à ML^{-1}.

Il s'ensuit que l'équation (15) est homogène. Elle est fondamentale pour la suite de l'étude car c'est sur son utilisation que repose la méthode utilisée pour calculer les coordonnées paramétriques de la trajectoire.

5. DETERMINATION DES EQUATIONS PARAMETRIQUES DE LA TRAJECTOIRE

Ces équations seront obtenues en intégrant le système

$$\begin{cases} dx = V \cos\Phi \, dt \\ dz = V \sin\Phi \, dt \end{cases}$$

Eliminons le temps entre chacune des équations du système et l'équation :

$$\rho v \, V \frac{d\Phi}{dt} = - (\rho - \rho') \, vg \cos\Phi \; ;$$

il vient :

$$\begin{cases} dx = - \dfrac{\rho}{(\rho - \rho')g} V^2 \, d\Phi \\ dz = - \dfrac{\rho}{(\rho - \rho')g} V^2 \, tg\Phi \, d\Phi \end{cases}$$

Les équations paramétriques de la trajectoire sont données par les intégrales suivantes :

(16)

$$x(\Phi) = - \frac{\rho v}{A} \int_{\alpha}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\cos^2\Phi \left[\dfrac{(\rho - \rho')vg}{AV_o^2 \cos^2\alpha} + F(\alpha) - F(\Phi) \right]}$$

$$z(\Phi) = - \frac{\rho v}{A} \int_{\alpha}^{\Phi} \frac{tg\Phi \, d\Phi}{\cos^2\Phi \left[\dfrac{(\rho - \rho')vg}{AV_o^2 \cos^2\alpha} + F(\alpha) - F(\Phi) \right]}$$

Ces intégrales ne peuvent être résolues par des fonctions mathématiques connues. Il faudra, pour obtenir les coordonnées paramétriques de la trajectoire, utiliser une méthode de calcul numérique qui sera exposée en détail à la fin de ce chapitre.

6. CAS PARTICULIER D'INTEGRATION COMPLETE : $\alpha = \frac{\Pi}{2}$

Dans le cas particulier du tir vertical, le mouvement est régi par l'équation différentielle (17).

$$(17) \quad \rho v \frac{d^2z}{dt^2} = - (\rho - \rho') vg - AV^2$$

Si nous nous limitons à l'étude de la partie ascendante de la trajectoire, nous pouvons écrire :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$$

Compte tenu des conditions aux limites, c'est-à-dire pour t = o $V = V_o$ et en posant :

$$tg\gamma = V_o \sqrt{\frac{A}{(\rho - \rho')vg}}$$

il vient à la suite d'une première intégration

$$(18) \quad V = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')vg}{A}} \; tg \left[\gamma - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{(\rho - \rho')gA}{v}} \; t \right]$$

L'expression (18) est l'équation de l'hodographe de la partie ascendante du mouvement, exprimée en fonction du temps comme paramètre.

Puisque :

$$V = \frac{dz}{dt}$$

le mouvement est régi par l'équation différentielle du premier ordre à variables séparables (19) :

$$(19) \quad dz = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')vg}{A}} \; tg \left[\gamma - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{(\rho - \rho')gA}{v}} \; t \right] dt$$

Compte tenu des conditions aux limites (pour t = o ; z = o); il vient

$$(20) \quad z = \frac{\rho v}{A} \log_e \left| \cos \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{(\rho - \rho')gA}{v}} \; t + V_o \sqrt{\frac{A}{(\rho - \rho')vg}} \sin \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{(\rho - \rho')gA}{v}} \; t \right|$$

Au temps

$$t = \gamma \rho \sqrt{\frac{v}{(\rho - \rho')gA}}$$

la goutte atteint le sommet de la trajectoire.

La cote maximale ainsi atteinte est donnée par l'expression

$$(21)\quad z_m = \frac{\rho v}{A} \log_e \left| \frac{1}{\cos\gamma} \right| = \left| \frac{\rho v}{2A} \log_e \left| 1 + \frac{A V_o^2}{(\rho - \rho')vg} \right| \right|$$

$$z_m = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left| 1 + \left(\frac{V_o}{V_\infty}\right)^2 \right|$$

Remarquons que nous pouvons obtenir directement l'expression z_m en posant

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dz} \times \frac{dz}{dt} = V \frac{dV}{dz}$$

Par suite :

$$V \frac{dV}{dz} = -\left[\frac{(\rho - \rho')g}{\rho} + \frac{A V^2}{\rho v} \right]$$

Et en intégrant :

$$(22)\quad z = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left| \frac{(\rho - \rho')vg + AV_o^2}{(\rho - \rho')vg + AV^2} \right|$$

Au sommet de la trajectoire, les conditions sont V = o et $z=z_m$ et l'expression (22) s'écrit encore :

$$(23)\quad z_m = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left| 1 + \frac{A V_o^2}{(\rho - \rho')vg} \right|$$

La trajectoire étant rectiligne, sa longueur depuis l'origine jusqu'au sommet est donnée par l'expression (23).

Cette expression est un cas particulier de l'expresssion générale (15) que nous avons calculé précédemment :

$$S_\alpha^\Phi = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left\{ 1 + \frac{A V_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')vg} \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right] \right\}$$

Appliquons la relation (15) dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ entre $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ et $\Phi = 0$

Nous avons démontré que pour $\Phi \to \frac{\Pi}{2}$

$$\cos^2\Phi \quad F(\Phi) \to 1$$

Puisque d'autre part F (o) = o il vient

$$S_{\frac{\Pi}{2}}^{o} = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left| 1 + \frac{A V_o^2}{(\rho - \rho')vg} \right| = z_m$$

La relation générale (15) rend donc bien compte de la solution particulière (23). Nous avons montré dans l'étude du cas général que la vitesse limite de la goutte tendait vers l'expression :

$$V_\infty = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')vg}{A}}$$

L'étude du présent cas particulier permet d'aboutir à la même conclusion. En effet, le mouvement sur la partie descendante de la trajectoire est régi par l'équation différentielle (24).

$$(24) \quad \rho v \frac{d^2z}{dt^2} = - (\rho - \rho')vg + A V^2$$

Cette fois, les conditions initiales sont V = 0 pour t = 0

L'intégration de l'équation (24) conduit à :

$$V = - \sqrt{\frac{(\rho - \rho')vg}{A}} \text{ th} \left[\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{(\rho - \rho')gA}{v}} t \right]$$

Lorsque $t \to \infty$, ont obtient

$$V = - \sqrt{\frac{(\rho - \rho')vg}{A}}$$

Nous retrouvons dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ l'expression de la vitesse limite trouvée dans le cas général.

L'étude particulière du cas où $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ présente un gros intérêt au point de vue expérimental, comme nous le montrerons par la suite, parce que l'expression (23) permet de calculer expérimentalement le terme :

$$\frac{\rho v}{2A}$$

qui est homogène à une longueur et qui fait intervenir conjointement la masse de la goutte, son maître-couple et son coefficient de trainée C_x.

7. ETUDE DE LA TRAJECTOIRE AU VOISINAGE DE L'ORIGINE

Au voisinage de l'origine, l'angle Φ est très peu différent de la valeur α .

Dans cette zone, nous pouvons effectuer l'approximation suivante :

$$F(\alpha) - F(\Phi) \simeq 0$$

Le système (16) se simplifie et nous aboùtissons aux relations (25)

$$(25)\begin{cases} x(\Phi) = -\dfrac{\rho}{(\rho-\rho')}\dfrac{V_o^2\cos^2\alpha}{g}\displaystyle\int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^2\Phi} = \dfrac{\rho}{(\rho-\rho')}\dfrac{V_o^2\cos^2\alpha}{g}(tg\alpha - tg\Phi) \\ z(\Phi) = -\dfrac{\rho}{(\rho-\rho')}\dfrac{V_o^2\cos^2\alpha}{g}\displaystyle\int_\alpha^\Phi \frac{tg\Phi\, d\Phi}{\cos^2\Phi} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{(\rho-\rho')}\dfrac{V_o^2\cos\alpha}{g}(tg^2\alpha - tg^2\Phi) \end{cases}$$

En éliminant Φ entre les deux expressions du système (25), nous obtenons l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$(26)\quad z = (tg\alpha)\,x - \frac{(\rho-\rho')g}{2\rho V_o^2\cos^2\alpha}x^2$$

Près de l'origine, la trajectoire est une parabole. Tout se passe dans cette zone comme si la résistance de l'air n'intervenait pas. Remarquons, d'autre part, que ρ' étant faible devant ρ, (26) peut s'écrire.

$$(27)\quad z = (tg\alpha)\,x - \frac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2$$

Cette équation est celle de la parabole classique des tirs effectués dans le vide. Il est important de remarquer que, près de l'origine, l'expression (26) ne fait plus intervenir la masse de la goutte. Nous avions supposé dans nos hypothèses qu'à l'origine la goutte était déjà formée, ce qui est contraire au phénomène observé, puisque dans cette zone n'existent pas de gouttes mais un jet continu. La conclusion mathématique qu'apporte l'expression (26) permet donc de rendre compte du phénomène observé et de justifier l'hypothèse simplificatrice de la formation des gouttes dès l'origine.

Il aurait été en effet très difficile autrement d'établir une théorie balistique du phénomène qui, débutant en jet, se termine en gouttes, le passage du phénomène continu (jet) au phénomène discontinu (gouttes) se prêtant très mal à une mise en équation simple. Nous retiendrons en définitive que, près de l'origine, la trajectoire admet la parabole classique du tir comme courbe osculatrice et ceci quel que soit

l'angle de tir, pourvu cependant qu'il soit différent de la valeur particulière $\alpha = \frac{\Pi}{2}$

8. INTEGRATION APPROCHEE, DANS CERTAINES LIMITES DES EQUATIONS PARAMETRIQUES (16)

L'idée directrice est de déterminer une fonction approchée de $F(\Phi)$, valable pour un intervalle défini de la variable Φ et telle que les équations (16) deviennent intégrables.

Quelle que soit la valeur de Φ nous pouvons écrire :

$$F(\Phi) = 2\int_{\alpha}^{\Phi} \sqrt{1 + tg^2\Phi}\, d(tg\Phi)$$

Pour $|tg\Phi| < 1$ nous connaissons le développement limité de $\sqrt{1 + tg^2\Phi}$

$$\sqrt{1 + tg^2\Phi} = - \sum_{o}^{n} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(2^n \cdot n!)^2 (2n - 1)} tg^{2n}\Phi$$

Dans l'intervalle de Φ défini ci-dessus et par suite de la convergence de la série alternée précédente, nous pouvons écrire :

$$2\int_{o}^{\Phi} - \sum_{o}^{n} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(2^n \cdot n!)^2 (2n - 1)} tg^{2n}\Phi\, d(tg\Phi) =$$

$$2\sum_{o}^{n} \int_{o}^{\Phi} - \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(2^n n!)^2 (2n - 1)} tg^{2n}\Phi\, d(tg\Phi)$$

Nous en déduisons le développement limité et la fonction $F(\Phi)$ pour $\Phi < \left|\frac{\Pi}{4}\right|$

$$(28)\quad F(\Phi) = - \sum_{o}^{n} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(4n^2 - 1)\, 2^{2n-1}\, (n!)^2} tg^{2n+1}\Phi$$

En nous limitant à l'ordre 5, F (Φ) a pour expression approchée

$$F(\Phi) = 2\,tg\Phi + \frac{1}{3}\,tg^3\Phi - \frac{1}{20}\,tg^5\Phi + \beta tg^7\Phi \quad \text{avec} \quad |\beta| < 1$$

Le résultat précédent aurait pu être obtenu directement en cherchant le développement limité de

$$F(\Phi) = \frac{\sin\Phi}{\cos^2\Phi} + \text{Arg sh}\,(tg\Phi)$$

8.1 PREMIERE APPROXIMATION

Lorsque la valeur absolue de Φ reste inférieure à 10°, il est légitime de poser :

$$F(\Phi) = 2\,tg\Phi$$

Les expressions (16) deviennent :

(29)
$$\begin{cases} x(\Phi) = -\dfrac{\rho v}{A}\displaystyle\int_\alpha^\Phi \dfrac{d\Phi}{\cos^2\Phi\left[\dfrac{(\rho-\rho')vg}{AV_o^2\cos^2\alpha} + 2\,tg\alpha - 2\,tg\Phi\right]} \\ z(\Phi) = -\dfrac{\rho v}{A}\displaystyle\int_\alpha^\Phi \dfrac{tg\Phi\,d\Phi}{\cos^2\Phi\left[\dfrac{(\rho-\rho')vg}{AV_o^2\cos^2\alpha} + 2\,tg\alpha - 2\,tg\Phi\right]} \end{cases}$$

Ces intégrales se résolvent sans difficulté. Nous trouvons :

$$x(\Phi) = \frac{\rho v}{2A}\log_e\left[1 + \frac{AV_o^2\cos^2\alpha}{(\rho-\rho')vg}(2\,tg\alpha - 2tg\Phi)\right]$$

$$z(\Phi) = -\frac{\rho v}{2A}(tg\alpha - tg\Phi) + \frac{\rho v}{4A}\left[\frac{(\rho-\rho')vg}{AV_o^2\cos^2\alpha} + 2\,tg\alpha\right]$$

$$\log_e\left|1 + \frac{AV_o^2\cos^2\alpha}{(\rho-\rho')vg}(2\,tg\alpha - 2\,tg\Phi)\right|$$

Eliminons Φ entre les deux équations précédentes. Nous obtenons l'équation cartésienne de la trajectoire dont les limites de validité

découlent de celles fixées pour Φ :

$$(30) \qquad z = \frac{-\rho\,(\rho - \rho')v^2 g}{4\,A^2\,V_o^{\,2}\cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2Ax}{\rho v}} - 1\right) + \left[\frac{(\rho - \rho')vg}{2\,AV_o^{\,2}\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right] x$$

Lorsque x est voisin de zéro, le développement limité de $e^{\frac{2Ax}{\rho v}}$

$$e^{\frac{2Ax}{\rho v}} = 1 + \frac{2A}{\rho v}\,x + \frac{4\,A^2}{2\,\rho^2\,v^2}\,x^2 + \ldots$$

introduit dans l'expression (30) conduit à l'équation

$$z = (\operatorname{tg}\alpha)\,x - \frac{(\rho - \rho')g}{2\,\rho\,V_o^{\,2}\cos^2\alpha}\,x^2$$

Nous retrouvons bien l'approximation de la parabole déjà mentionnée en (26).

8.2 DEUXIEME APPROXIMATION

Dans un domaine plus étendu, on peut utiliser l'approximation :

$$F(\Phi) = 2\,\operatorname{tg}\Phi + \frac{1}{3}\,\operatorname{tg}\Phi^3$$

et obtenir des équations paramétriques mais d'utilisation beaucoup moins commode :

Posons :

$$\begin{cases} \dfrac{(\rho - \rho')vg}{AV_o^{\,2}\cos^2\alpha} + F(\alpha) = K_1 \\[2ex] \dfrac{\rho v}{A} = K_2 \end{cases}$$

Le système (16) devient

$$(31) \qquad \begin{cases} x(\Phi) = 3\,K_2 \displaystyle\int_\alpha^\Phi \frac{d(\operatorname{tg}\Phi)}{\operatorname{tg}^3\Phi + 6\,\operatorname{tg}\Phi - 3\,K_1} \\[2ex] z(\Phi) = 3\,K_2 \displaystyle\int_\alpha^\Phi \frac{\operatorname{tg}\Phi\, d(\operatorname{tg}\Phi)}{\operatorname{tg}^3\Phi + 6\,\operatorname{tg}\Phi - 3\,K_1} \end{cases}$$

Etudions l'équation :

$$tg^3\Phi + 6\ tg\Phi - 3\ K_1 = o$$

Le discriminant $4\ p^3 + 27\ q^2$ étant positif, l'équation précédente possède une racine réelle et deux racines imaginaires.

Désignons par "a" la racine réelle. La valeur de "a" sera donnée par les relations :

$$a = 2\sqrt{2}\ sh\ \frac{\psi}{3}$$

avec :

$$sh\psi = \frac{3}{4\sqrt{2}}\ K_1$$

La décomposition des expressions (31) en éléments simples peut alors s'effectuer

$$\frac{1}{tg^3\Phi + 6\ tg\Phi - 3\ K_1} \equiv \frac{A}{tg\Phi - a} + \frac{B\ tg\Phi + C}{tg^2\Phi + atg\Phi + 6 + a^2}$$

avec :

$$A = \frac{1}{6 + 3\ a^2} \quad ; \quad B = \frac{-1}{6 + 3\ a^2} \quad ; \quad C = \frac{-2a}{6 + 3\ a^2}$$

$$\frac{tg\Phi}{tg^3\Phi + 6\ tg\Phi - 3\ K_1} \equiv \frac{A_1}{tg\Phi - a} + \frac{B_1\ tg\Phi + C_1}{tg^2\Phi + atg\Phi + 6 + a^2}$$

avec :

$$A_1 = \frac{a}{6 + 3\ a^2} \quad , \quad B_1 = \frac{-a}{6 + 3\ a^2} \quad , \quad C_1 = \frac{6 + a^2}{6 + 3\ a^2}$$

Les intégrations s'effectuent alors sans difficulté :

$$x\ (\Phi) = \frac{\rho v}{(2+a^2)\ A}\left[\log_e \frac{tg\Phi - a}{\sqrt{tg^2\Phi + atg\Phi + 6 + a^2}} - a\sqrt{\frac{3}{8+a^2}}\ Arctg\ \frac{2\ tg\Phi + a}{\sqrt{24 + 3\ a^2}}\right]_\alpha^\Phi$$

$$z\ (\Phi) = \frac{3\ a\ \rho v}{A}\ x\ (\Phi) + \frac{6v\rho}{A\sqrt{24 + 3\ a^2}}\left[Arctg\ \frac{2\ tg\Phi + a}{\sqrt{24 + 3\ a^2}}\right]_\alpha^\Phi$$

Remarquons que z (Φ) peut s'obtenir à partir de x (Φ), simple-

ment à l'aide de l'artifice de calcul suivant :

$$3\,K_2\int_{\alpha}^{\Phi}\frac{tg\Phi\;d\,(tg\Phi)}{tg^3\Phi + 6\,tg\Phi - 3\,K_1} = 3\,K_2\int_{\alpha}^{\Phi}\frac{(tg\Phi + a - a)\;d\,(tg\Phi)}{tg^3\Phi + 6\,tg\Phi - 3\,K_1}$$

$$= 3\,K_2\;a\;x\;(\Phi) + 3\,K_2\int_{\alpha}^{\Phi}\frac{d\,(tg\Phi)}{tg^2\Phi + atg\Phi + 6 + a^2}$$

ces équations posent déjà de sérieux problèmes de calculs numériques.

L'utilisation plus poussée du développement de F (Φ) conduit à des calculs trop compliqués pour être exploitables utilement.

Nous avons voulu cependant montrer qu'il était possible d'obtenir, dans certaines limites, des fonctions paramétriques approchées des trajectoires.

9. INTEGRATION DANS LE CAS LIMITE OU $\frac{A}{\rho v} \to o$

Ce cas limite, bien que théorique, peut présenter cependant un certain intérêt pour la compréhension des phénomènes physiques.

Dans ce cas, l'équation (7) s'écrit :

$$\frac{1}{V^2\cos^2\Phi} = \frac{1}{V_o{}^2\cos^2\alpha}$$

Par suite :

$$(33)\qquad \begin{cases} x\;(\Phi) = -\dfrac{\rho V_o{}^2\cos^2\alpha}{(\rho - \rho')\,g}\displaystyle\int_{\alpha}^{\Phi}\frac{d\Phi}{\cos^2\Phi} \\ z\;(\Phi) = -\dfrac{\rho V_o{}^2\cos^2\alpha}{(\rho - \rho')\,g}\displaystyle\int_{\alpha}^{\Phi}\frac{tg\Phi\;d\Phi}{\cos^2\Phi} \end{cases}$$

soit

$$(34)\qquad \begin{cases} x(\Phi) = \dfrac{\rho V_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')\, g}\ (tg\alpha - tg\Phi) \\ z(\Phi) = \dfrac{\rho V_o^2 \cos^2\alpha}{2(\rho - \rho')\, g}\ (tg^2\alpha - tg^2\Phi) \end{cases}$$

En éliminant Φ entre les expressions(34), nous obtenons l'équation cartésienne de la trajectoire qui est une parabole :

$$z = (tg\alpha)\, x - \frac{(\rho - \rho')g}{2\rho V_o^2 \cos^2\alpha}\, x^2$$

La longueur de la trajectoire est donnée par la relation

$$S_{p_\alpha}^{\Phi} = -\frac{\rho V_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')\, g} \int_\alpha^\Phi \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi}$$

$$(35)\qquad S_{p_\alpha}^{\Phi} = \frac{\rho V_o^2 \cos^2\alpha}{2(\rho - \rho')\, g}\ \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]$$

Comparons l'équation (35) à l'équation (15)

$$S_\alpha^\Phi = \frac{\rho v}{2A}\ \log_e \left\{1 + \frac{AV_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')vg}\ \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]\right\}$$

Puisque $\frac{A}{\rho v} \to o$

$$\log_e \left\{1 + \frac{AV_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')vg}\ \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]\right\} \simeq \frac{AV_o^2 \cos^2\alpha}{(\rho - \rho')vg}\ \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right]$$

Par suite :

$$S_\alpha^\Phi = \frac{\rho V_o^2 \cos^2\alpha}{2(\rho - \rho')\, g}\ \left[F(\alpha) - F(\Phi)\right] = S_{p_\alpha}^{\Phi}$$

En conclusion, les équations générales rendent compte encore de ce cas particulier. Donc si ρv, croît mais de telle sorte que $\frac{A}{\rho v} \to o$, on constate que l'on se rapproche des conditions théoriques dans lesquelles la force de résistance de l'air serait négligeable. On en conclut que la force de résistance de l'air est surtout sensible sur les petites gouttes.

Ce qui précède montre que l'on peut écrire :

$$(36)\quad S_{\alpha}^{\Phi} = \frac{\rho v}{2A} \log_e \left(1 + \frac{2A}{v\rho} S_{\alpha p}^{\Phi}\right)$$

Cette relation montre qu'il existe une parenté certaine entre la trajectoire réelle et la parabole.

En remarquant que les expressions :

$$\mathscr{S}_{\alpha}^{\Phi} = \frac{2A\, S_{\alpha}^{\Phi}}{\rho v} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}_{\alpha p}^{\Phi} = \frac{2A\, S_{\alpha p}^{\Phi}}{\rho v}$$

sont sans dimensions, nous pouvons écrire l'équation adimensionnelle de la trajectoire :

$$(37)\quad \mathscr{S}_{\alpha}^{\Phi} = \log_e \left(1 + \mathscr{S}_{\alpha p}^{\Phi}\right)$$

et dans le cas où $\mathscr{S}_{\alpha p}^{\Phi}$ est voisin de o, nous constatons que :

$$\mathscr{S}_{\alpha p}^{\Phi} = \mathscr{S}_{\alpha}^{\Phi}$$

ce qui confirme que, près de l'origine, la meilleure approximation de la trajectoire est la parabole pour laquelle la fonction de résistance de l'air est supposée nulle.

De plus, en remarquant que l'expression :

$$\mathscr{V}_{\alpha}^{\Phi} = \frac{V_o \cos\alpha}{V \cos\Phi} \quad \text{est sans dimensions également,}$$

nous constatons que la fonction représentative de l'hodographe peut se mettre sous la forme adimensionnelle suivante :

$$(38)\quad \left(\mathscr{V}_{\alpha}^{\Phi}\right)^2 = 1 + \mathscr{S}_{\alpha p}^{\Phi}$$

Les équations adimensionnelles de la longueur de la trajectoire et de l'hodographe sont liées par la relation :

$$(39)\quad \mathscr{S}_{\alpha}^{\Phi} = 2 \log_e \mathscr{V}_{\alpha}^{\Phi}$$

L'expression (38) indique que l'expression V cosΦ diminue constamment depuis l'origine du mouvement ce qui explique pourquoi la trajectoire, dans le cas général, admet une asymptote.

10. METHODE DE CALCUL DES TRAJECTOIRES

La masse volumique de l'air étant très faible vis-à-vis de la masse volumique de l'eau, nous pouvons écrire en posant :

$$m = \rho v$$

l'équation (15) sous la forme suivante :

$$(40)\quad S_{\alpha}^{\Phi} = \frac{m}{2A} \log_e \left\{ 1 + \frac{AV_o^2 \cos^2\alpha}{mg} \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right] \right\}$$

Nous avons considéré que la vitesse initiale V_o était liée à la hauteur représentative H de la pression au niveau de l'ajutage par la relation :

$$(41)\quad V_o^2 = 2\,g\,H$$

Compte tenu de l'équation (41), l'expression (40) s'écrit alors:

$$(42)\quad S_{\alpha}^{\Phi} = \frac{m}{2A} \log_e \left\{ 1 + \frac{2A\,H\cos^2\alpha}{m} \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right] \right\}$$

Nous rappelons que l'angle α désigne l'angle de tir à l'origine et Φ l'angle orienté que fait la tangente à la trajectoire avec l'axe horizontal ox du trièdre orthonormé de référence.

Dans ce qui suit, les angles α et Φ seront exprimés en degrés.

Quand l'angle Φ varie d'une unité, la goutte a parcouru un élément de trajectoire :

$$(43)\quad \Delta S_{\Phi-1}^{\Phi} = S_{\alpha}^{\Phi} - S_{\alpha}^{\Phi-1}$$

La variation de Φ étant faible, on peut assimiler l'élément curviligne $\Delta S_{\Phi-1}^{\Phi}$ à la corde qui le soutend.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire les deux équations suivantes :

$$(44)\begin{cases} \Delta x^{\Phi}_{\Phi-1} = \frac{1}{2}\left[\cos(\Phi - 1) + \cos\Phi\right] \Delta S^{\Phi}_{\Phi-1} \\ \Delta z^{\Phi}_{\Phi-1} = \frac{1}{2}\left[\sin(\Phi - 1) + \sin\Phi\right] \Delta S^{\Phi}_{\Phi-1} \end{cases}$$

Les coordonnées de la trajectoire sont obtenues en effectuant les deux sommations suivantes :

$$x^{\Phi}_{\alpha} = \sum_{\alpha}^{\Phi} \Delta x$$

$$z^{\Phi}_{\alpha} = \sum_{\alpha}^{\Phi} \Delta y$$

La conduite pratique des calculs nécessite la connaissance des données numériques :

- connaissance de α et H, valeurs que nous nous fixons a priori,
- détermination du terme $\frac{m}{2A}$ que nous déduisons de la mesure expérimentale de la hauteur de la trajectoire pour $\alpha = 90°$ d'après la relation établie au paragraphe 6

$$z_m = \frac{m}{2A} \log_e \left(1 + \frac{2A\,H}{m}\right)$$

- connaissance des valeurs de la fonction F (Φ) de degré en degré pour Φ variant de 0° à 90°.

Pour les valeurs négatives de Φ , la fonction F ($-\Phi$) est liée à la fonction F Φ par la relation simple :

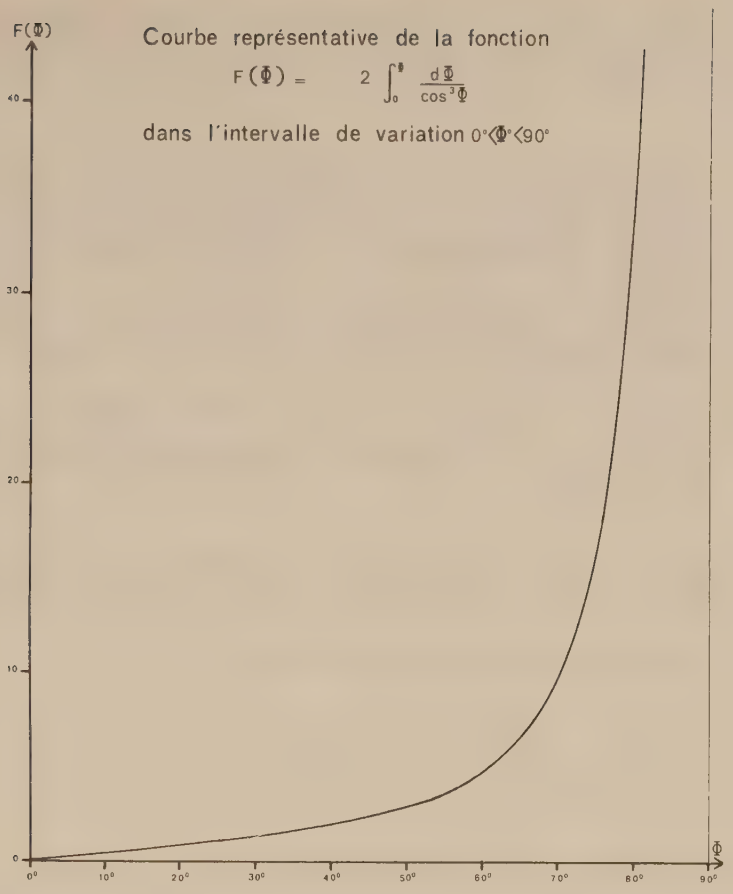
$$F(-\Phi) = -2\int_{0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\cos^3\Phi} = -F(\Phi)$$

car la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{\cos^3\Phi}$ présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. La tabulation de la fonction F (Φ) a été simplifiée du fait que :

$$F(\Phi) = \frac{\sin\Phi}{\cos^2\Phi} + \text{Arg sh}(\text{tg}\Phi)$$

en remarquant que la fonction Arg sh (tg Φ) = $\log_e$ tg (45° + $\frac{\Phi}{2}$) se trouve tabulée de degré en degré dans les Tables Numériques universelles de Marcel BOLL (page 487) sous le nom d'Antigudermannien.

Nous donnons pages suivantes les valeurs de la fonction F (Φ).



$$F(\varphi) = 2\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

φ	F (φ)	φ	F (φ)	φ	F (φ)
0°	0	-	-	-	-
1°	0, 03491	31°	1, 27054	61°	5, 07352
2°	0, 06985	32°	1, 32686	62°	5, 39503
3°	0, 10486	33°	1, 38505	63°	5, 74980
4°	0, 13996	34°	1, 44526	64°	6, 14300
5°	0, 17520	35°	1, 50763	65°	6, 58091
6°	0, 21059	36°	1, 57233	66°	7, 07063
7°	0, 24618	37°	1, 63954	67°	7, 62166
8°	0, 28200	38°	1, 70945	68°	8, 24510
9°	0, 31808	39°	1, 78228	69°	8, 95488
10°	0, 35447	40°	1, 85827	70°	9, 76849
11°	0, 39119	41°	1, 93767	71°	10, 70817
12°	0, 42829	42°	2, 02078	72°	12, 07008
13°	0, 46580	43°	2, 10789	73°	13, 08809
14°	0, 50377	44°	2, 19936	74°	14, 61443
15°	0, 54224	45°	2, 29558	75°	16, 44712
16°	0, 58125	46°	2, 39395	76°	18, 67614
17°	0, 62085	47°	2, 50402	77°	21, 42731
18°	0, 66109	48°	2, 61725	78°	24, 88082
19°	0, 70203	49°	2, 73725	79°	29, 30216
20°	0, 74370	50°	2, 86472	80°	35, 09585
21°	0, 78618	51°	3, 00039	81°	42, 90165
22°	0, 82952	52°	3, 14513	82°	53, 78635
23°	0, 87379	53°	3, 29990	83°	69, 08272
24°	0, 91905	54°	3, 46581	84°	93, 97045
25°	0, 96538	55°	3, 64413	85°	134, 27415
26°	1, 01286	56°	3, 83630	86°	208, 36311
27°	1, 06156	57°	4, 04398	87°	368, 23198
28°	1, 11158	58°	4, 26912	88°	824, 58295
29°	1, 16302	59°	4, 51393	89°	3 287, 38100
30°	1, 21597	60°	4, 78105	90°	∞

Pour établir les tableaux de calcul, on opérerait de la manière suivante :

1ère colonne : angle Φ variant de degré en degré de α à 0° pour la partie ascendante de la trajectoire et de 0° à - Φ pour la partie descendante de la trajectoire.

2ème colonne : calcul des expressions F (α) - F (Φ) . Ces valeurs sont toujours positives et croissent de 0 pour $\Phi = \alpha$ à l'infini pour $\Phi = -90°$.

3ème colonne : calcul des expressions $1 + \frac{2A\ H\ \cos^2\alpha}{m} \left[F\ (\alpha) - F\ (\Phi)\right]$. Ces valeurs croissent de 1 pour $\Phi = \alpha$ à l'infini pour $\Phi = -90°$.

4ème colonne : lecture dans une table de logarithmes décimaux à 7 décimales des expressions portées dans la troisième colonne. Ces valeurs croissent de 0 pour $\Phi=\alpha$ à l'infini pour $\Phi=-90°$.

5ème colonne : Calcul des expressions du type :

$$\log_{10} \left\{1 + \frac{2A\ H\ \cos^2\alpha}{m} \left[F\ (\alpha) - F\ (\Phi)\right]\right\}$$

$$- \log_{10} \left\{1 + \frac{2A\ H\ \cos^2\alpha}{m} \left[F\ (\alpha) - F\ (\Phi - 1)\right]\right\}$$

que l'on obtient en soustrayant la ligne de rang n à la ligne de rang n - 1 dans la quatrième colonne (n = 1 pour la ligne ayant pour grandeur directrice la valeur $(\alpha-1)°$). Ces valeurs décroissent dans un certain intervalle pour croître ensuite.

6ème colonne : Détermination des valeurs $\Delta S_{\Phi_{-1}}^{\Phi}$ en multipliant les expressions de la 5ème colonne par la quantité :

$$\frac{m}{2A} \times 2{,}30259$$

le nombre 2,30259 permettant le passage des logarithmes à base 10 aux logarithmes népériens.

7ème colonne : détermination des valeurs Δ x en multipliant chaque valeur de la 6ème colonne par $\frac{1}{2} \left[\cos\ (\Phi - 1) + \cos\Phi\right]$.

On effectue ensuite les sommations

$$\sum_{\alpha}^{\alpha-5°} \Delta x \quad , \qquad \sum_{\alpha}^{\alpha-10°} \Delta x \quad , \qquad \sum_{\alpha}^{\alpha-15°} \Delta x \ , \ldots . , \qquad \sum_{\alpha}^{-90°} \Delta x$$

qui tendent vers une limite : la position de l'asymptote.

8ème colonne : détermination des valeurs Δy en multipliant chaque valeur de la sixième colonne par $\frac{1}{2}\left[\sin(\Phi - 1) + \sin\Phi\right]$.

On effectue ensuite les sommations

$\sum_{\alpha}^{\alpha-5^\circ} \Delta y$, $\sum_{\alpha}^{\alpha-10^\circ} \Delta y$ la sommation $\sum_{\alpha}^{0^\circ} \Delta y$ donne le sommet de la trajectoire et la sommation $\sum_{\alpha}^{-90^\circ} \Delta y$ tend vers l'infini négatif.

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA BALISTIQUE DES ASPERSEURS

1. LES RAISONS D'UNE EXPERIMENTATION SUR MODELE REDUIT

L'observation montre que le jet d'un asperseur immobile est soumis à de nombreuses fluctuations qui peuvent se classer dans deux catégories distinctes :

- des fluctuations dont la cause est bien déterminée et reproductibles expérimentalement ;
- des fluctuations aléatoires.

FLUCTUATIONS DONT LA CAUSE EST CONNUE

Elles sont essentiellement dues aux changements des conditions atmosphériques ou bien aux variations du régime hydraulique à l'amont de l'ajutage de l'asperseur.

L'observation montre qu'un vent de direction constante en moyenne, même de faible vitesse, perturbe fortement les caractéristiques du milieu ambiant et entraîne des modifications profondes dans le mouvement des gouttes. Cette action est surtout sensible à partir du moment où les gouttes sont individualisées.

Les modifications du régime hydraulique portent essentiellement sur une augmentation ou une diminution de la pression à l'amont de l'ajutage. Une diminution de la pression entraîne un raccourcissement de la portée tandis qu'une augmentation de la pression entraîne un allongement de la portée, toutes choses égales par ailleurs.

FLUCTUATIONS ALEATOIRES

Sans qu'il ait été possible d'affirmer l'exactitude de la cause du phénomène, les conditions observées étant très lâches, il semblerait que la portée augmente en fonction de la température ambiante. Au laboratoire du Tholonet, près d'Aix-en-Provence, nous avons constaté, au cours d'essais de longue durée, que la portée, toutes choses égales par ailleurs, était plus courte à six heures du matin qu'à dix heures du matin. On ne peut faire intervenir l'hygrométrie de l'air qui se trouve toujours à un état proche de la saturation dans l'entourage immédiat du jet.

Par contre, le gradient de température qui existe entre le volume d'air occupé par le jet et le volume d'air extérieur au jet provoque des phénomènes de convection qui perturbent le mouvement des gouttes.

Près de l'ajutage de l'asperseur, dans la zone où précisément les gouttes sont les plus fines et donc plus sensibles aux perturbations atmosphériques, on observe des mouvements tourbillonnaires aléatoires.

Les fluctuations aléatoires sont à rapprocher d'ailleurs du phénomène de la dispersion du tir d'une pièce d'artillerie.

Les observations exposées ci-dessus nous ont paru suffisamment importantes pour chercher à obtenir des conditions hydrauliques et atmosphériques aussi constantes que possible. Il fallait donc renoncer aux expérimentations en plein air et s'orienter vers une expérimentation s'effectuant dans un hall couvert. Il devenait alors impossible d'étudier un asperseur réel faute d'un local suffisamment vaste.

En opérant sur modèle réduit, nous pouvions pallier les difficultés ci-dessus.

2. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE L'EXPERIMENTATION SUR MODELE REDUIT

L'avantage du modèle réduit est de tenir peu de place, et les mesures des trajectoires peuvent alors se faire dans un local clos, ce qui permet d'obtenir des conditions atmosphériques constantes dans le temps et, par voie de conséquence, d'effectuer des mesures plus significatives. Il est possible d'obtenir aisément, et par un dispositif expérimental sûr, un régime hydraulique permanent.

L'expérimentation sur modèle réduit présente cependant des inconvénients dont le principal découle de la pression hydraulique utilisée, dix fois plus faible environ que celle utilisée dans la réalité, ceci afin d'obtenir des trajectoires de dimensions restreintes, s'adaptant aux dimensions du laboratoire.

Nous savons que le vecteur vitesse à l'origine conditionne le choix de la fonction représentative de la résistance de l'air. Il se peut, dans ces conditions, *que les conclusions trouvées au laboratoire ne soient que partiellement ou pas du tout transposables pour rendre compte des phénomènes observés dans la réalité.*

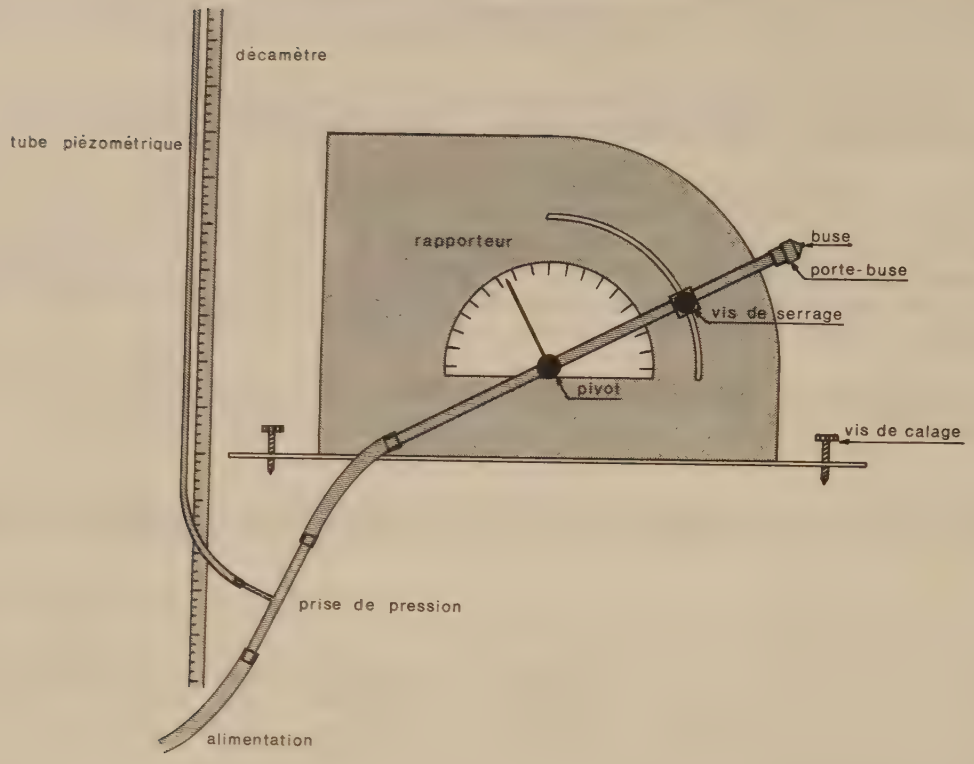
Les commodités expérimentales d'effectuer, sur modèle réduit, des mesures concernant des phénomènes dont cet ouvrage ne constitue que l'étude préalable, nous a semblé devoir l'emporter largement sur les inconvénients.

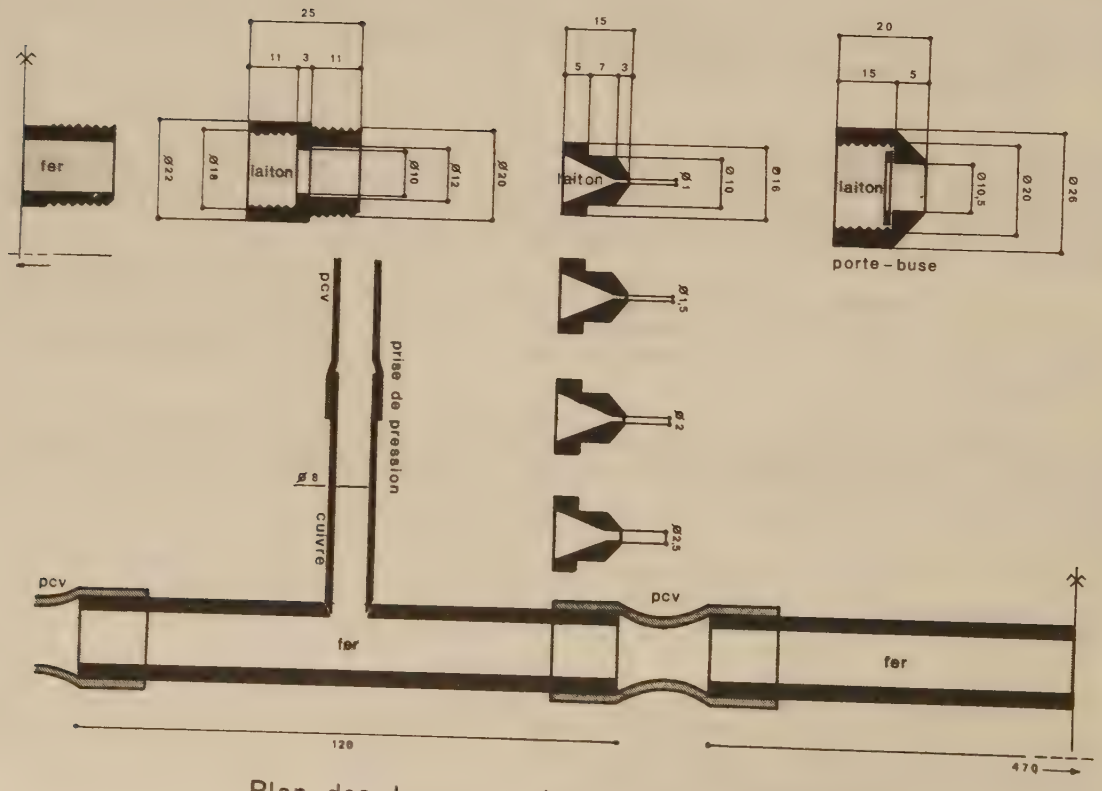
Aussi avons-nous, dans cette étude, axé notre effort sur la compréhension des phénomènes balistiques et granulométriques du modèle réduit.

3. DESCRIPTION DU MODELE REDUIT UTILISE

Le modèle réduit construit suivant les plans ci-joints permet de faire varier l'angle de tir α et de mettre en évidence l'influence de ce paramètre pour ce qui est de la forme des trajectoires et de la portée de l'asperseur.

Schéma du modèle réduit utilisé





Plan des buses et des raccords utilisés

L'alimentation en eau du modèle se fait par l'intermédiaire d'une cuve à trop-plein, ce qui nous permet de conserver un régime hydraulique permanent très bien défini. Un tube piézométrique, situé à l'amont du corps du modèle réduit, permet d'évaluer les pertes de charge dues à la présence des tuyauteries entre la cuve à trop-plein et l'asperseur.

Nous avons construit des buses métalliques de diamètre 1 mm, 1,5 mm, 2 mm, 2,5 mm, afin d'étudier le paramètre buse dans ses rapports avec la balistique et la granulométrie.

Le présent modèle réduit nous conduira donc à étudier l'influence de l'angle de tir α et du diamètre de l'ajutage sur la balistique du jet, la pression hydraulique restant constante.

4. OBSERVATION DU JET - DEFINITIONS

La mécanique rationnelle démontre que le centre de gravité d'un système quelconque se meut comme un point matériel isolé de masse égale à la masse totale du système. Le centre de gravité du système décrit une trajectoire ou courbe balistique. Cette définition convient très bien à l'étude balistique d'un projectile unique, parfaitement défini quant à sa forme et quant à sa masse. Il n'en est pas de même en ce qui concerne notre étude, car nous ne connaissons ni la forme, ni la masse des projectiles. Dans une certaine zone, il est même difficile de parler de projectile au sens de la balistique extérieure. Considérons le modèle réduit qui projette de l'eau sous un angle de tir différent de 90°. L'observation du phénomène dans le plan vertical contenant l'axe de l'ajutage nous conduit à diviser l'espace plan défini en deux domaines :

- le domaine mouillé,
- le domaine sec.

Ces deux domaines se trouvent limités par une frontière plus ou moins floue dont la concavité est tournée vers le bas.

Près de l'ajutage et sur une longueur variable, la frontière se réduit à une veine liquide parfaitement lisse et parfaitement transparente. L'observation montre qu'aucune goutte ne s'en échappe. Il suffit, pour s'en rendre compte, d'approcher une plaque rigide et noire au voisinage de la veine. Aucun impact, aucune trace d'humidité ne s'inscrira sur la plaque.

A partir d'un certain point, la veine lisse et transparente devient trouble. Tout en restant encore très individualisée, nous constatons que le diamètre de cette veine croît au fur-et-à-mesure que l'on s'éloigne de l'ajutage, dans des proportions relativement faibles cependant. En recommençant l'expérience de la plaque noire, nous constatons que se détachent de cette veine trouble, et uniquement du côté concave, des gouttes très fines et très sensibles aux perturbations atmosphériques, la seule approche d'un observateur suffisant à modifier leur chute. Ces gouttes, de diamètre très homogène, possèdent des trajectoires caractéristiques. Après avoir franchi le sommet de leur trajectoire, elles tombent verticalement (à condition bien entendu que l'atmosphère ambiante ne

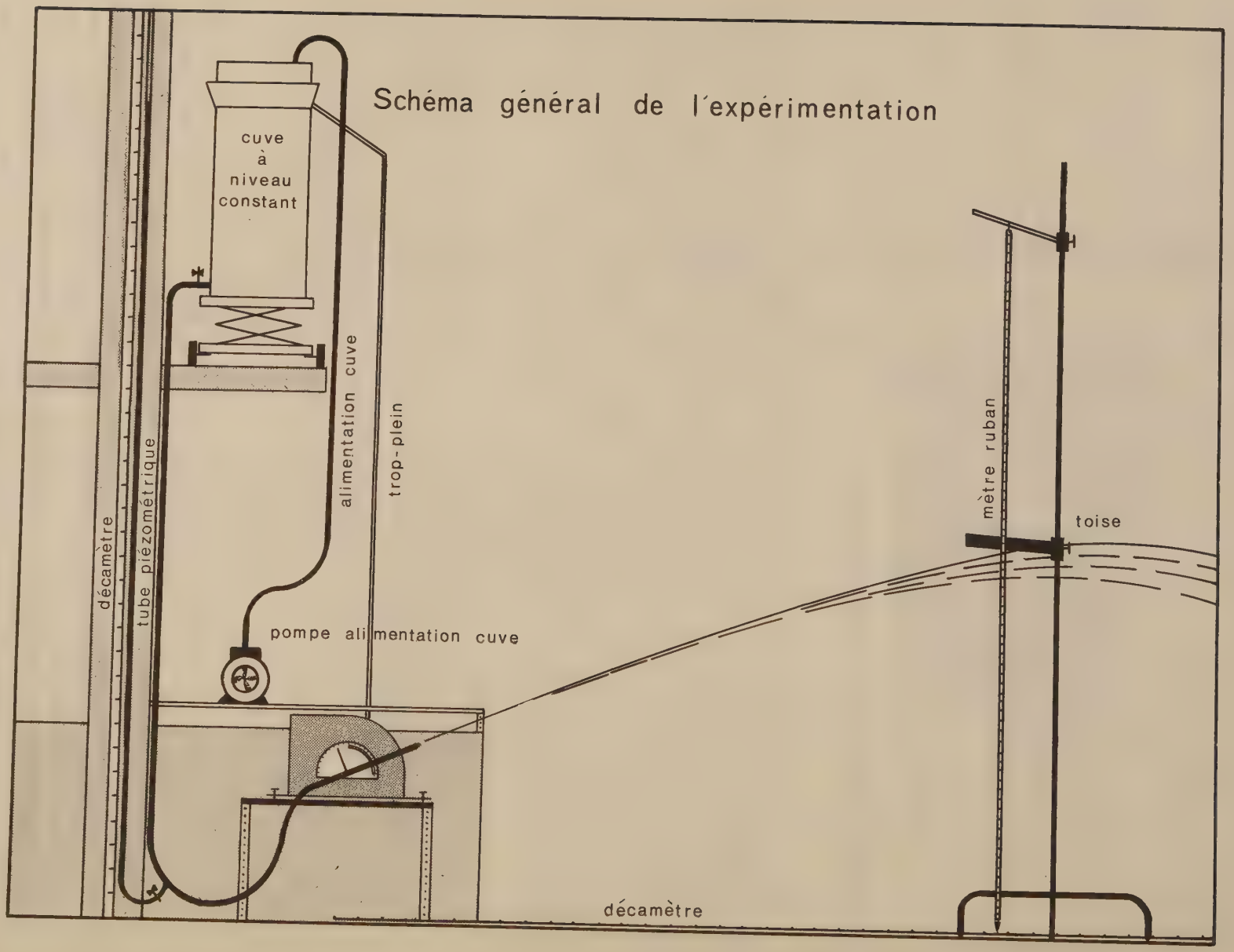


Schéma général de l'expérimentation
cuve
à
niveau
constant
alimentation cuve
trop-plein
décamètre
tube piézométrique
pompe alimentation cuve
mètre ruban
toise
décamètre

soit pas perturbée pendant leur chute). La première trajectoire quasi verticale que l'on rencontre constitue la frontière latérale gauche des domaines sec et mouillé.

Le passage de la veine lisse à la veine trouble peut s'expliquer en admettant que les filets liquides tendent à s'individualiser, ce qui permet à l'air ambiant de s'introduire dans la couche périphérique. De proche en proche, le phénomène s'accentue, l'air s'introduisant de plus en plus profondément au coeur de la veine, ce qui expliquerait l'accroissement progressif de la veine trouble.

A partir d'un endroit difficile à définir objectivement, la veine trouble se disperse en se ramifiant surtout dans la zone concave, mais aussi dans la zone convexe. Le coeur de la veine trouble se rétrécit et s'évanouit progressibement au fur-et-à-mesure que l'on s'éloigne de l'ajutage. Cette dislocation peut s'expliquer en considérant que l'air est un milieu plus visqueux que l'eau. La viscosité cinématique de l'air est environ treize fois supérieure à celle de l'eau, ceci pour des conditions normales de la pression et de la température. La couche périphérique, au contact avec l'air, se trouve freinée, ce qui provoque son déchirement. Cette couche périphérique se résout en gouttelettes. Au sein de la veine liquide, il se forme immédiatement une autre couche limite qui se trouve soumise au même phénomène. Comme le freinage est moins intense du fait que, globalement, la veine a perdu une partie de son énergie, la fragmentation en gouttes est moins instantanée et, les forces de tension superficielle jouant, les gouttes formées se trouvent être relativement plus grosses.

Nous pouvons aussi expliquer qualitativement le phénomène en nous rappelant que dans la section contractée d'un jet, la répartition des vitesses est uniforme et que tous les filets liquides se déplacent à la même vitesse. Ils ne glissent donc pas les uns sur les autres et il en résulte qu'il n'y a pas de forces tangentielles. Ce phénomène se poursuit tant que, nous semble-t-il, dure la veine transparente. A partir de la périphérie de la veine, des forces de frottement sont engendrées et il apparait des forces tangentielles qui gagnent progressivement le coeur de la veine au fur-et-à-mesure que l'on se déplace sur l'abscisse curviligne de la trajectoire. Les forces tangentielles provoquent une dissipation d'énergie qui a pour résultat de dilater la veine, phénomène qui peut se réaliser sans difficulté puisque le milieu ambiant est dilatable.

En un point difficile à préciser, la veine a totalement disparu pour faire place à des gouttes nettement individualisées. Nous sommes dans la zone des gouttes. La courbe balistique de portée la plus grande, définit la frontière latérale droite (et en partie la frontière supérieure) des domaines mouillé et sec.

Dans la zone définie par la portée maximum, nous constatons que les gouttes sont de diamètre beaucoup plus grand que celles issues de la première couche périphérique de la veine trouble. L'observation montre donc que, au fur-et-à-mesure que l'on s'éloigne de l'ajutage, les gouttes augmentent de diamètre. Nous avons donc une infinité de projectiles à étudier.

Les observations précédentes nous mettent, au point de vue de la balistique, en présence de deux phénomènes distincts.

a) Les gouttes n'étant pas individualisées dès la sortie de l'ajutage, il faudrait donc en toute rigueur, parler d'une courbe balistique d'une veine liquide. L'étude mathématique effectuée au chapitre précédent montre que, près de l'origine, c'est-à-dire dans la zone même où existe la veine, les équations auxquelles nous parvenons ne font plus intervenir la masse d'une goutte individualisée. Les équations obtenues rendent donc bien compte de cette balistique particulière et permettent en quelque sorte de justifier l'existence de ce phénomène transitoire que constitue la veine transparente lisse.

b) Puisque au moment où la veine liquide s'est évanouie, nous n'avons que des gouttes, il est alors possible de parler de projectile au sens classique de la balistique extérieure.

Les équations mathématiques définies antérieurement leur sont alors applicables sans restriction. Le diamètre des gouttes augmentant depuis l'origine de l'ajutage jusqu'au point de portée maximum, nous aurons donc une infinité de trajectoires possibles, ces trajectoires étant conditionnées en partie, par le spectre des gouttes émises. Nous avons choisi d'étudier uniquement les trajectoires extrêmes, car se sont les seules qui se prêtent à un relevé expérimental significatif.

5. RELEVE DE LA TRAJECTOIRE DE PLUS GRANDE PORTEE

Cette trajectoire particulière se confond géométriquement avec la frontière limitant le domaine sec et le domaine mouillé.

Deux procédés expérimentaux peuvent être envisagés pour relever cette trajectoire :

- le procédé photographique,
- le procédé de relevé par abscisse et ordonnée.

Le procédé photographique présente à première vue, le gros avantage d'être une méthode instantanée et objective au sens expérimental du terme, puisqu'elle ne fait pas intervenir directement l'observateur. Cependant, la transcription en nombres des coordonnées de la trajectoire photographiée laisse apparaître très vite de sérieuses difficultés. En effet, si la veine liquide dans son intégrité laisse une trace parfaitement nette sur la photographie, il n'en est pas de même de la zone de résolution des gouttes où nous observons une plage très floue, et l'imprécision des mesures qui en résulte est très élevée. Les possibilités de l'appareil ne permettent pas d'obtenir, malgré l'exiguïté des trajectoires à photographier, la totalité de celles-ci sur une pellicule unique si l'on veut pouvoir photographier d'assez près pour enregistrer les détails des courbes. La visualisation des gouttes nécessite, d'autre part un matériel d'éclairage coûteux.

En conséquence, nous avons préféré utiliser le procédé de relevé par abscisse et ordonnée. Pour ce faire, nous avons placé sur le sol du laboratoire, dont l'horizontalité a été vérifiée, un double décamètre qui matérialise l'axe des abscisses. En un point déterminé de cet axe, nous plaçons une potence supportant un mètre ruban plombé. Perpendiculairement à l'axe de la potence se trouve une plaque noire pouvant coulisser

librement le long de l'axe de la potence. Sur cette plaque s'inscrivent les impacts des gouttes. La limite du domaine mouillé et du domaine sec peut être cernée assez correctement (à la dispersion près des gouttes en cet endroit).

Les différentes trajectoires ont été relevées en prenant les points tous les 10 cm sur l'axe des abscisses. Chaque trajectoire a été relevée six fois afin de se rendre compte de la dispersion des résultats expérimentaux.

CHAPITRE V

CONCLUSIONS DE L'ETUDE BALISTIQUE

1. NOMENCLATURE DES EXPERIENCES REALISEES

1.1 EXPERIENCES REALISEES SUR L'AJUTAGE DE 1 MM DE DIAMETRE

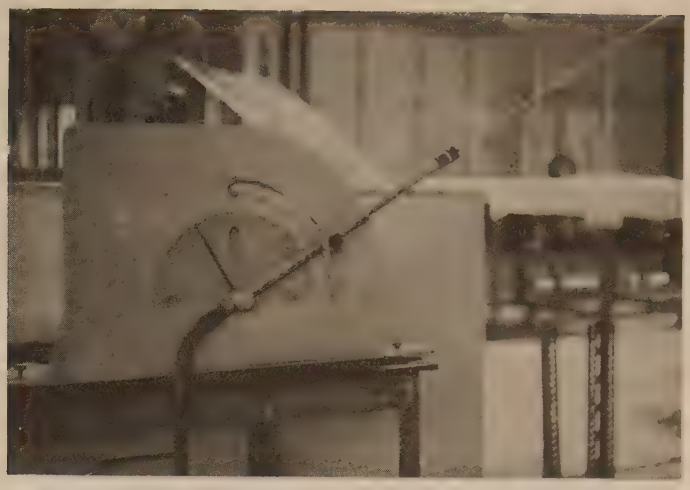
Le paramètre que nous avons fait varier dans cette série d'expériences est l'angle de tir α. Nous avons relevé successivement les trajectoires pour des angles de tir variant de 10° en 10° depuis $\alpha = 0°$ jusqu'à $\alpha = 90°$.

Nous avons aussi relevé la pression exprimée en mètre de colonne d'eau au niveau de l'ajutage :

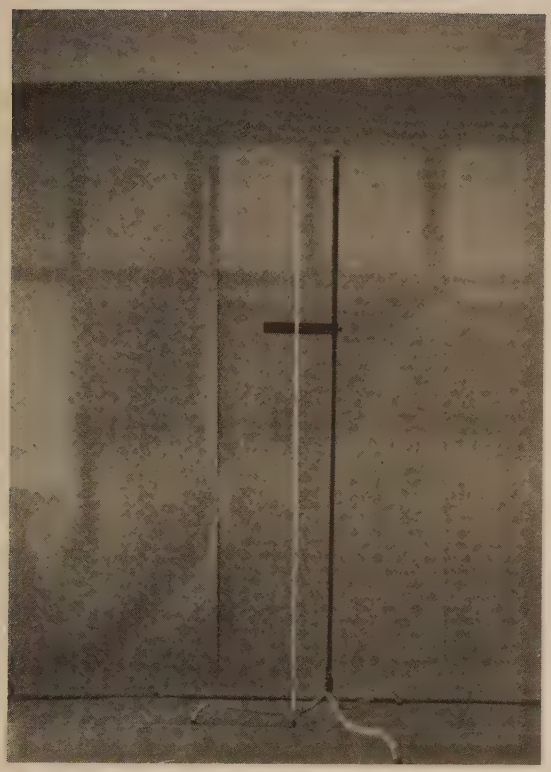
α	H. m de C.E.
0°	3,78
10°	3,70
20°	3,62
30°	3,55
40°	3,49
50°	3,43
60°	3,38
70°	3,35
80°	3,33
90°	3,33

Pour chaque angle de tir, nous avons recommencé 6 fois le relevé des trajectoires par la méthode des abscisses et des ordonnées décrite dans le chapitre précédent. L'origine du repère utilisé est le centre de gravité de l'ajutage. Pour obtenir un nombre de points suffisamment dense, nous avons été conduits à prendre une série de points sur l'axe des abscisses distants les uns des autres de 10 cm. Les valeurs des ordonnées seront positives si la trajectoire se trouve au-dessus du plan horizontal passant par le centre de gravité de l'ajutage et négatives dans le cas contraire. Ce sont ces nombres relatifs que nous avons uniquement mentionnés dans cette étude.

Pratiquement, nous avons relevé les ordonnées à partir du plan horizontal matérialisé par le sol du laboratoire. De ces résultats, nous avons déduit ceux mentionnés dans les tableaux annexés en soustrayant de chaque hauteur trouvée la distance verticale constante pour un angle α donné, séparant le sol du laboratoire du centre de gravité de l'ajutage. Cette façon de procéder permet d'uniformiser la présentation des résultats



Vue générale de l'asperseur.



La toise et le décamètre utilisés pour le relevé expérimental des trajectoires.

La cuve à niveau constant.

et d'effectuer des comparaisons chiffrées plus parlantes pour des trajectoires d'angles de tir différents.

Toutes les mesures ont été faites dans des conditions atmosphériques sensiblement constantes quant à la pression et à la température.

1.2 EXPERIENCES REALISEES POUR UN ANGLE φ = 30° ET UNE PRESSION CONSTANTE H = 3,72 M C.E.

Dans cette seconde série d'expériences, la variable est le diamètre de l'ajutage.

Quatre diamètres ont été testés : 1 mm, 1,5 mm, 2 mm, 2,5 mm.

Nous avons limité à trois le nombre des relevés expérimentaux de trajectoire pour chaque diamètre.

Le choix de l'angle de tir α = 30° résulte du fait expérimental que c'est pour cette valeur particulière que les trajectoires admettent une portée maximum.

2. PRECISION DES MESURES

2.1 SUR LES HAUTEURS REPRESENTATIVES DE LA PRESSION

Les mesures de la hauteur représentative de la pression hydraulique ont été faites à l'aide d'un tube piézométrique, ce qui a permis d'obtenir une excellente précision, le régime permanent étant très aisément obtenu à l'aide de la cuve à trop-plein. En toute rigueur, il aurait fallu déduire les pertes de charge dues au corps de l'asperseur entre la prise de pression et l'ajutage. Mais la faible distance séparant ces deux points (20 cm) et la faible vitesse de l'eau à l'intérieur du corps de l'asperseur, due au fait que le rapport des sections des divers ajutages à la section du corps de l'asperseur est très faible, font que l'on peut négliger ces pertes de charge.

Celles-ci peuvent se représenter par relation

$$j = k \frac{V^2 a}{2g} S$$

V_a désignant la vitesse à l'intérieur du corps de l'asperseur,
S désignant la distance séparant la prise de pression, de l'ajutage,
Si V_o désigne la vitesse dans la section de l'ajutage, nous avons

$$V_a = V_o \frac{\Omega}{\Omega a}$$

Ω et Ω_a désignant les sections des ajutages et du corps de l'asperseur.

Nous avons admis en définitive qu'au centre de gravité de l'ajutage la charge H exprimée en mètres de colonne d'eau était identique à celle relevée dans le tube piézométrique.

Dans ces conditions, la vitesse V_o est donnée par la relation

$$V_o = \sqrt{2\ g\ H}$$

avec V_o en m/s

g = 9,81 m/s/s

H en m.

Nous pouvons calculer l'erreur relative sur V_o

$$\frac{\Delta V_o}{V_o} = \frac{1}{2}\ \frac{\Delta H}{H}$$

En admettant pour ΔH la valeur de 0,5 cm, ce qui est très pessimiste, nous constatons que, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire dans la série d'expériences où H a la plus faible valeur :

$$\frac{\Delta V_o}{V_o} = \frac{1}{2} \times \frac{0,5}{333} < 10^{-3}$$

$$V_o = \sqrt{2\ g\ H}\ (\ 1 \pm 10^{-3}\ )$$

2.2 SUR LES COORDONNEES DES POINTS EXPERIMENTAUX

Les pointés sur l'axe des abscisses matérialisé par un décamètre ont été faits à l'aide d'un fil à plomb solidaire d'une potence mobile. Les erreurs de pointés sur l'axe des abscisses proviennent essentiellement d'une erreur de parallaxe estimée inférieure à 2 mm.

$$x = k\ 10\ cm \pm 0,2\ cm$$

k étant un nombre entier positif ou nul.

Ce sont les ordonnées qui donnent lieu aux plus grandes fluctuations de mesures. Lorsque le jet est encore bien individualisé, les mesures sont bonnes et la précision est supérieure à 0,3 cm. Lorsque les gouttes sont individualisées, il n'en est plus de même. Les phénomènes aléatoires de dispersion de tir interviennent et des écarts de 20 à 30cm peuvent être enregistrés. La lecture des résultats chiffrés mentionnés ci-après est parlante à cet égard.

3. PRESENTATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les points expérimentaux ont été reportés sur un papier millimétré et nous constatons que le nuage constitué par l'ensemble des points obtenus présente une dispersion qui va en augmentant au fur et à mesure que la portée augmente.

4. DETERMINATION ET PRECISION DU TERME : $\frac{m}{2A}$

Nous avons admis que le terme $\frac{m}{2A}$ était invariant le long de la trajectoire et indépendant de l'angle de tir α . Dans ces conditions, le terme $\frac{m}{2A}$ peut être déduit des mesures expérimentales effectuées dans le cas particulier où $\alpha = 90°$. Nous avons démontré dans le chapitre précédent la relation

$$Z = \frac{m}{2A} \log_e \left(1 + \frac{2\,AH}{m}\right)$$

qui nous permet de calculer la valeur du terme $\frac{m}{2A}$

Posons $\frac{m}{2A} = 1$

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial l}\, dl + \frac{\partial Z}{\partial H}\, dH \qquad \text{soit}$$

$$dZ = \left[\log_e \left(1 + \frac{H}{l}\right) - \frac{H}{l + H}\right] dl + \frac{1}{l + H}\, dH$$

En remarquant que

$$\log_e \left(1 + \frac{H}{l}\right) = \frac{Z}{l}$$

l'expression précédente s'écrit :

$$dZ = \left[\frac{Z}{l} - \frac{H}{l + H}\right] dl + \frac{1}{l + H}\, dH$$

La relation qui nous permettra de calculer les erreurs s'écrit :

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial Z}{\partial H}\right| \Delta H$$

Il vient en définitive :

$$(1) \qquad \Delta Z = \left(\frac{z}{l} + \frac{H}{l + H}\right) \Delta l + \frac{1}{l + H}\, \Delta H$$

Nous avons vu précédemment que l'erreur absolue commise sur H est très faible. Nous pouvons en première approximation la négliger par rapport à l'erreur commise sur Z qui, elle, est beaucoup plus importante. Dans ces conditions, l'expression (1) devient :

$$(2)\quad \Delta Z = \left(\frac{Z}{l} + \frac{H}{l + H} \right) \Delta l$$

et l'expression (2) peut s'écrire d'une manière plus symétrique :

$$(3)\quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta z}{Z} \left[\frac{\frac{1}{l} + \frac{1}{H}}{\frac{1}{l} + \frac{1}{H} + \frac{1}{Z}} \right]$$

Quelles que soient les valeurs de l, H et Z nous voyons que

$$\frac{\Delta l}{l} = K \frac{\Delta Z}{Z}$$

K étant une valeur inférieure à 1.

L'erreur relative sur $l = \frac{m}{2A}$ est donc au plus égale à l'erreur relative sur Z. Après avoir mesuré 50 fois la hauteur Z, nous en avons déduit la valeur moyenne Z = 2,38 m, ce qui nous a permis de déduire la valeur :

$$\frac{m}{2A} = 3{,}75 \text{ m}$$

En admettant pour ΔZ la valeur 0,10 m qui résulte de l'étude statistique sur Z, il vient :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}10}{2{,}38} < 5{,}10^{-2}$$

Le terme $\frac{m}{2A}$ est donc connu avec la précision suivante

$$\frac{m}{2A} = 3{,}75 \text{ m} \pm 0{,}2 \text{ m}$$

5. COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX DE LA PREMIERE SERIE D'EXPERIENCES

Muni de la valeur globale du coefficient $\frac{m}{2A} = 3{,}75$ m, nous avons calculé les différentes trajectoires suivant la méthode exposée à la fin du chapitre 3. Dans le présent exposé, nous n'avons mentionné que les résultats définitifs de ces calculs. Nous avons testé la précision de la méthode d'intégration numérique en nous référant à la longueur de la trajectoire dont nous connaissons une expression mathématique exacte.

Pour tout élément d'arc de trajectoire, nous avons la relation

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$S_{num} = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

Nous savons d'autre part que la longueur de la trajectoire est donnée par la relation

$$S_{théo} = \frac{m}{2A} \log_e \left\{ 1 + \frac{2\,AH \cos^2\alpha}{m} \left[F(\alpha) - F(\Phi) \right] \right\}$$

L'erreur relative due à l'intégration numérique est donc

$$\frac{\left| S_{num} - S_{théo} \right|}{S_{théo}}$$

L'erreur relative a été chaque fois trouvée inférieure à 10^{-2} et la méthode employée peut être considérée comme suffisamment précise.

Nous avons alors tracé les trajectoires théoriques sur le même papier millimétré qui portait déjà les points expérimentaux trouvés.

De la confrontation de la position des points expérimentaux et des courbes trajectoires théoriques, *il ressort que la théorie rend très bien compte de la position du sommet de la trajectoire*.

Nous constatons d'autre part que les trajectoires théoriques s'écartent un peu des points expérimentaux en fin de portée. Ceci est dû au phénomène aléatoire de la dispersion de tir et provient du fait que nous avons adopté, pour définir la trajectoire maximale, une méthode expérimentale basée sur l'observation du plus haut impact arrivant dans une durée de temps assez longue (10 mn); il est normal d'avoir ainsi défini une trajectoire expérimentale de probabilité marginale et il est normal d'observer ainsi une certaine divergence d'ailleurs faible avec les résultats théoriques.

6. COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX DE LA DEUXIEME SERIE D'EXPERIENCES

Dans la seconde série d'expériences, l'angle de tir et la pression étaient constants, la seule variable étant le diamètre de l'ajutage.

Nous avons constaté que la portée était d'autant plus grande que le diamètre de la buse était grand.

Nous avons trouvé les résultats suivants :

$$\emptyset\ 1\ mm\ \frac{m}{2A} = 3{,}75\ m$$

$$\emptyset\ 1{,}5mm\ \frac{m}{2A} = 4{,}75\ m$$

$$\emptyset\ 2\ mm\ \frac{m}{2A} = 5{,}75\ m$$

$$\emptyset\ 2{,}5mm\ \frac{m}{2A} = 6{,}75\ m$$

pour H = 3,72 m et $\alpha = 30°$.

Qualitativement, nous avons remarqué qu'il existait une différence dans le spectre des diamètres des gouttes émises par les divers ajutages testés. Les courbes balistiques théoriques rendent compte correctement des phénomènes expérimentaux observés.

7. UTILISATION DES EQUATIONS APPROCHEES

En utilisant l'approximation $F(\phi) = 2\ tg\alpha$, nous sommes parvenus à l'équation (30) (cf. chapitre 3). Compte tenu de la faiblesse de la masse volumique de l'air par rapport à celle de l'eau, cette équation s'écrit :

$$z = \left(\frac{m}{4\ AH\ \cos^2\alpha} + tg\alpha \right) x - \frac{m^2}{8\ A^2\ H\ \cos^2\alpha} \left(e^{\frac{2\ Ax}{m}} - 1 \right)$$

Il nous a paru intéressant de consacrer à cette équation une étude particulière pour voir dans quelles limites elle rendait compte des résultats expérimentaux observés.

La fonction est définie quel que soit x, mais seul l'intervalle $0 < x < \infty$ présente une signification physique. Dans ce domaine, la fonction z (x) admet un maximum qui est obtenu en annulant la dérivée de z (x).

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m}{4\ AH\ \cos^2\alpha} + tg\alpha - \frac{m}{4\ AH\ \cos^2\alpha}\ e^{\frac{2\ A}{m}\ x}$$

La trajectoire passe par un maximum ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_m = \frac{m}{2A}\ \log_e\ (1 + \frac{2\ AH}{m}\ \sin\ 2\ \alpha) \\ z_m = \left(\frac{m}{4\ AH\ \cos^2\alpha} + tg\alpha \right) x_m - \frac{m}{2A}\ tg\alpha \end{cases}$$

Remarquons que la courbe représentative de la fonction z (x) n'admet pas d'asymptote.

La portée est obtenue en résolvant l'équation z (x) = o qui admet une autre solution que la solution particulière x = o qui correspond à l'origine. Pour résoudre cette équation, effectuons le changement de variable suivant :

$$x = K \frac{m}{2A}$$

Cette fois, K est l'inconnue. Il vient

$$e^K = K \left(1 + \frac{2A}{m} H \sin 2\alpha\right) + 1$$

La valeur de K sera obtenue graphiquement en relevant le point d'intersection de la courbe représentative de l'exponentielle e^K et de la droite d'équation

$$z = 1 + K \left(1 + \frac{2A}{m} H \sin 2\alpha\right).$$

Connaissant K, nous trouvons la valeur x en revenant à la variable originelle.

7.1 LIMITES D'APPLICATION DE L'EQUATION PROPOSEE

Nous savons que cette équation a été obtenue dans le cas particulier où α et Φ sont inférieurs à 10° en valeur absolue. Sortie de ces limites, l'équation n'est qu'approchée. Cherchons les portés pour diverses valeurs de α .

α	porté théorique (m)	porté expérimentale (m)	parabole (m)
0°	0,00	0,00	0,00
10°	2,17	2,10	2,52
20°	3,37	3,35	4,64
30°	4,12	4,05	6,14
40°	4,46	4,25	6,86
50°	4,38	4,03	6,74
60°	3,97	3,48	5,86
70°	3,22	2,58	4,30
80°	2,02	1,40	2,28
90°	0,00	0,00	0,00

Nous constatons que pour $\alpha \leqslant 30°$, les portées théoriques et expérimentales diffèrent de moins de 5.10^{-2} . De toute façon, la fonction

proposée approche mieux le phénomène que la parabole classique d'équation

$$z = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{x^2}{4\,H\cos^2\alpha}$$

qui a pour portée la valeur $2\,H\sin^2\alpha$

Pour l'angle de tir $\alpha = 30°$, les coordonnées du sommet de la trajectoire obtenues en utilisant l'équation (30) sont

$$\begin{cases} x_s = 2{,}24 \text{ m} \\ z_s = 0{,}70 \text{ m} \end{cases}$$

Ces résultats théoriques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Nous avons tracé la courbe représentative de l'équation (30) en utilisant les données expérimentales

$$H = 3{,}72 \text{ m}$$

$$\frac{m}{2A} = 3{,}75 \text{ m}$$

Nous pouvons simplifier avantageusement les calculs en posant

$$x = K\,\frac{m}{2A}$$

Il vient alors

$$z = \frac{m}{2A}\left[\operatorname{tg}\alpha \cdot K - \frac{m}{4\,AH\cos^2\alpha}\,(e^K - K - 1)\right]$$

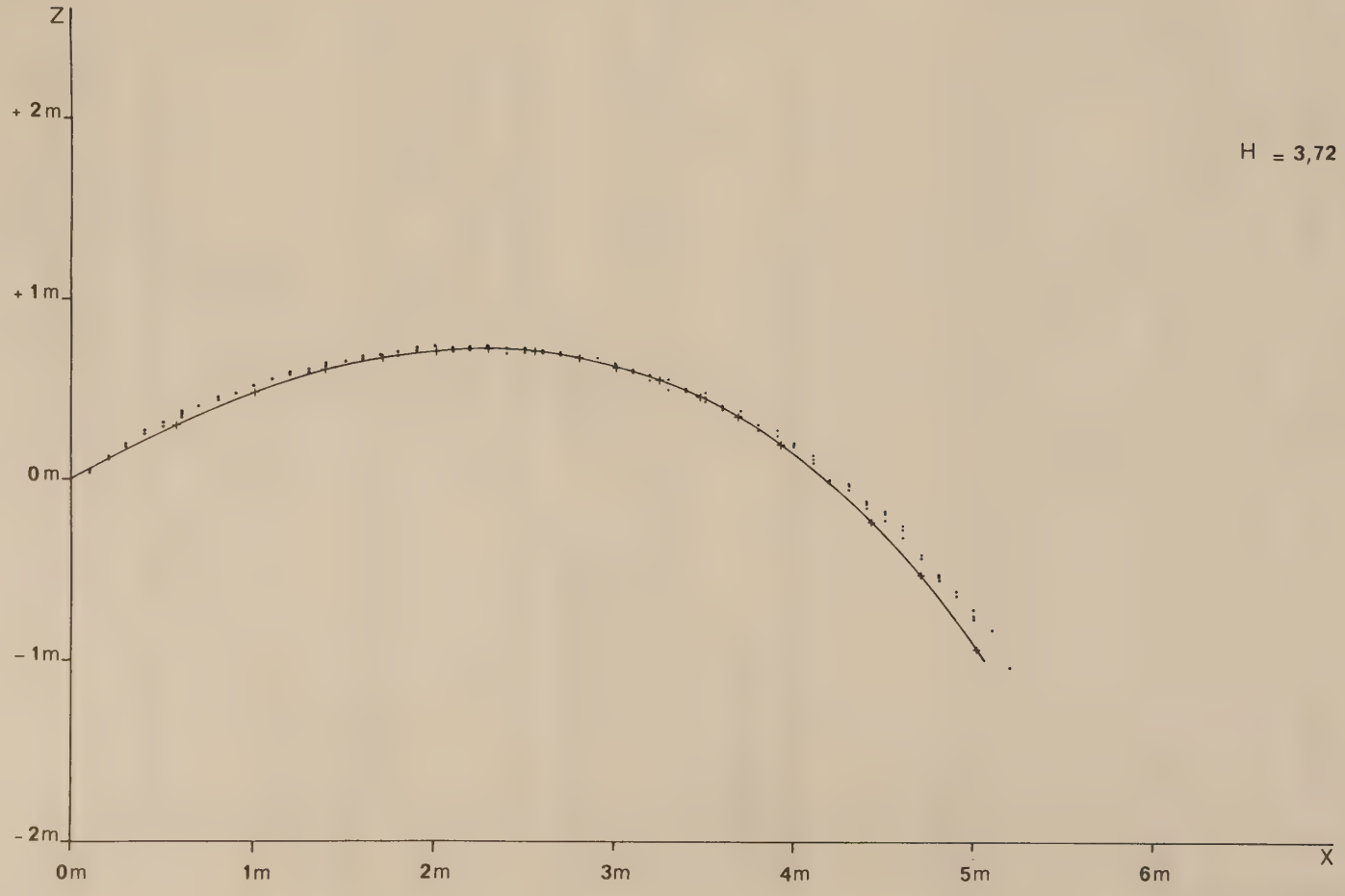
Les calculs sont consignés dans le tableau suivant :

$$z = 2{,}165\,K - 2{,}520\,(e^K - K - 1)$$

K	2,165 K	e^K-K-1	$2{,}520\,(e^K-K-1)$	Z (m)	x (m) $=K\times 3{,}75$
0	0	0	0	0	0
0,1	0,2165	0,00517	0,0130	0,203	0,375
0,2	0,4330	0,02140	0,0539	0,379	0,750
0,3	0,6495	0,04986	0,1256	0,523	1,125
0,4	0,8660	0,09182	0,2313	0,634	1,500
0,5	1,0825	0,14872	0,3747	0,707	1,875
0,6	1,2990	0,22212	0,5597	0,739	2,250
0,7	1,5155	0,31375	0,7906	0,724	2,625
0,8	1,7320	0,42554	1,0723	0,659	3,000
0,9	1,9485	0,55960	1,4101	0,538	3,375
1,0	2,1650	0,71828	1,8100	0,355	3,750
1,1	2,3815	0,90417	2,2785	0,103	4,125
1,2	2,5980	1,12012	2,8227	-0,224	4,500
1,3	2,8145	1,36930	3,4506	-0,636	4,875
1,4	3,0310	1,65520	4,1711	-1,140	5,250

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique pour :

$$Z = \left(\frac{m}{4AH\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \right) x - \frac{m^2}{8A^2H\cos^2\alpha} \left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1 \right)$$



Ø = 1,0 mm

H = 3,72 $\frac{m}{2A}$ = 3,75 m

α = 30°

Nous constatons que nous rendons compte de la trajectoire expérimentale relevée avec une bonne approximation.

Cette équation est donc susceptible de présenter un intérêt pratique pour les ingénieurs.

L'utilisation de l'approximation $F(\Phi) = 2\,tg\Phi + \frac{1}{3}\,tg^3\Phi$ conduit à des calculs plus compliqués.

Dans le cas particulier où $\alpha = 30°$, $H = 3{,}72$ m et $\frac{m}{2A} = 3{,}75$ m et en utilisant les relations (32) du chapitre 3, il vient :

Valeur de la racine réelle : $a = 1{,}074$

Après résolution numérique des intégrales 31 (chapitre 3), on trouve pour les coordonnées du sommet, les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x_s = 2{,}27 \text{ m} \\ z_s = 0{,}73 \text{ m} \end{cases}$$

Nous rendons compte correctement des résultats expérimentaux, mais l'emploi des formules proposées est beaucoup moins commode que précédemment.

8. APPLICATION DE LA FORMULE APPROCHEE A L'ETUDE DES TRAJECTOIRES D'UN ASPERSEUR REEL

Nous avons étudié les trajectoires de l'asperseur SEPPIC 70 BW.

Les coordonnées de chaque trajectoire ont été relevées par la méthode des abscisses et ordonnées.

Les caractéristiques de l'asperseur SEPPIC 70 BW sont :

- angle de tir : $\alpha = 28°$
- diamètre de la buse $\emptyset = 5{,}56$ mm

Nous avons relevé les trajectoires correspondant aux 4 pressions suivantes :

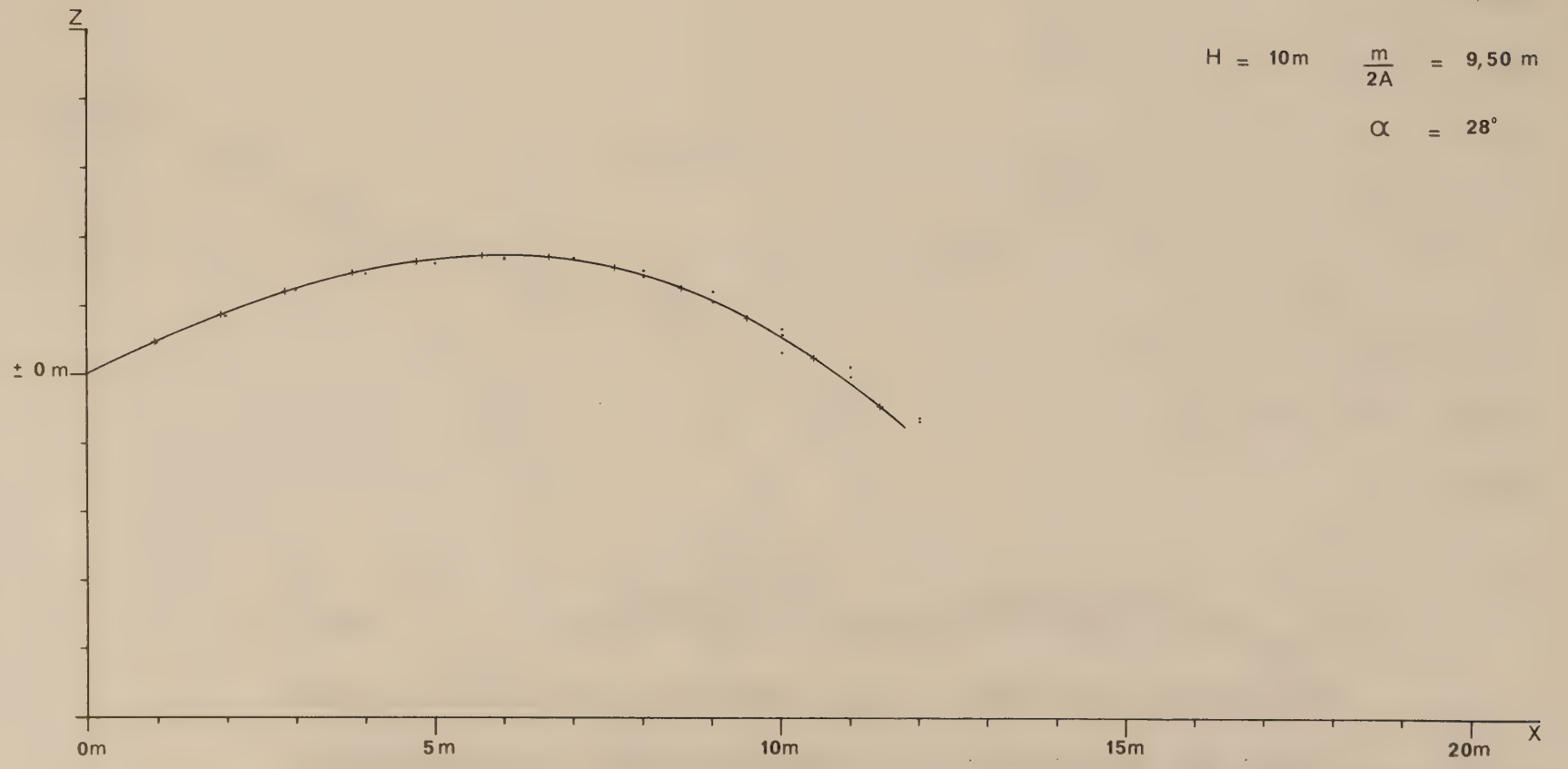
H = 10 m C.E.
H = 20 m C.E.
H = 30 m C.E.
H = 40 m C.E.

Les termes $\frac{m}{2A}$ trouvés ont été les suivants :

pour H = 10 m C.E..... $\frac{m}{2A} = 9{,}50$ m
pour H = 20 m C.E..... $\frac{m}{2A} = 8{,}50$ m
pour H = 30 m C.E..... $\frac{m}{2A} = 7{,}75$ m
pour H = 40 m C.E..... $\frac{m}{2A} = 6{,}75$ m

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique pour :

$$Z = \left(\frac{m}{4AH\cos^2\alpha} + tg\alpha \right) x - \frac{m^2}{8A^2H\cos^2\alpha} \left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1 \right)$$



Ø = 5,56mm

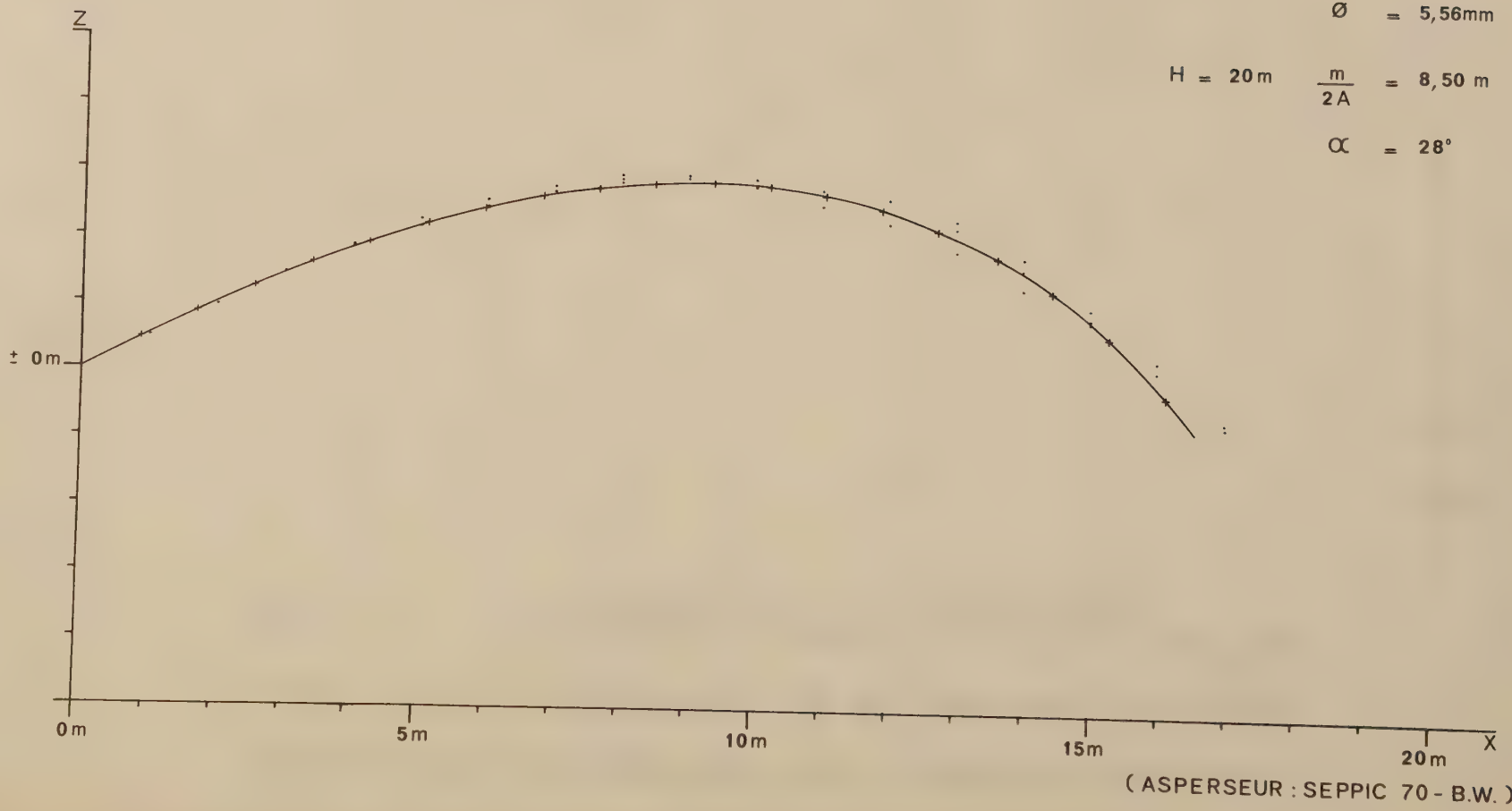
H = 10m $\frac{m}{2A}$ = 9,50 m

α = 28°

(ASPERSEUR : SEPPIC 70 - B.W.)

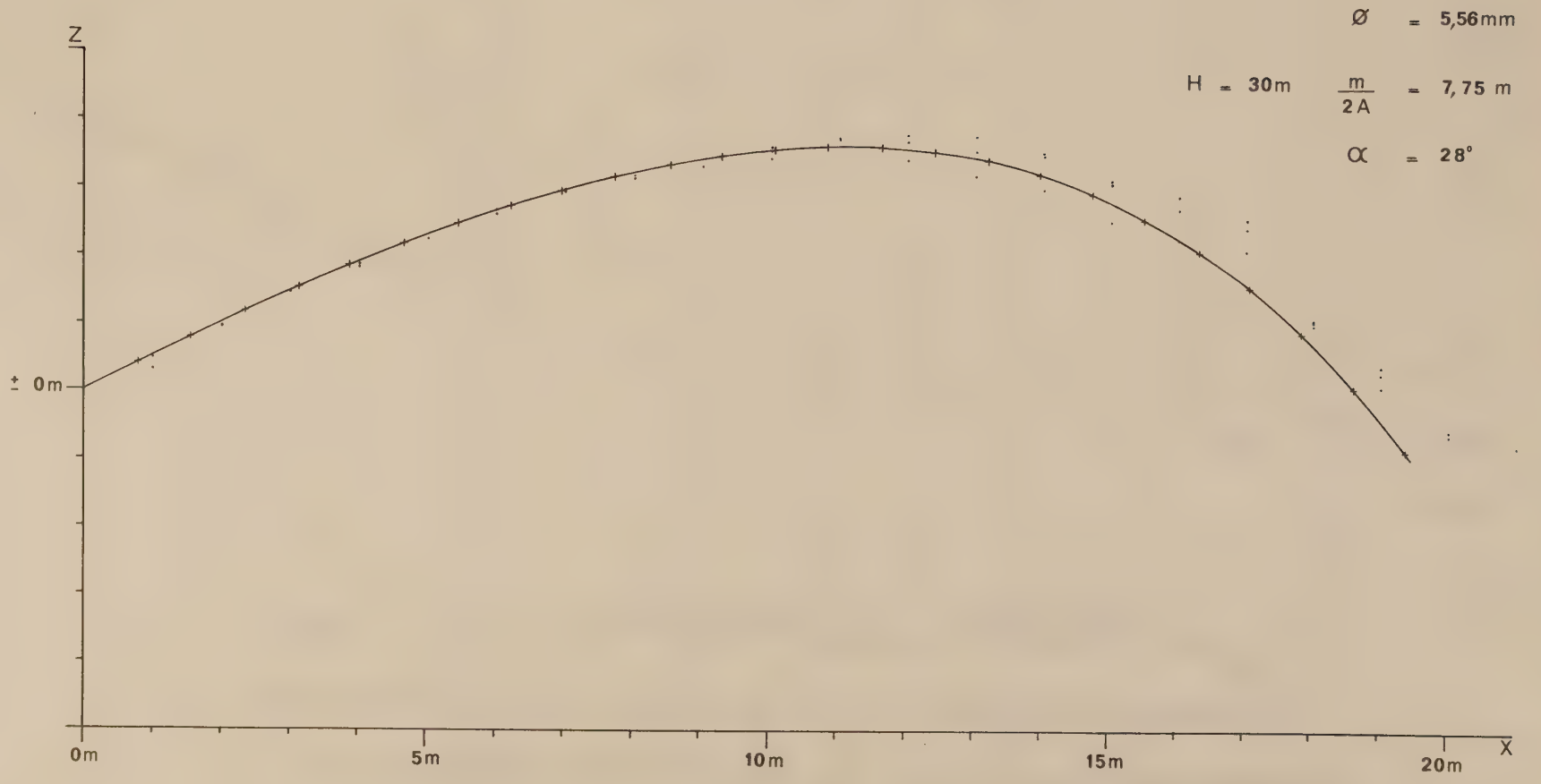
Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique pour :

$$Z = \left(\frac{m}{4AH\cos^2\alpha} + tg\alpha \right) x - \frac{m^2}{8A^2H\cos^2\alpha} \left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1 \right)$$



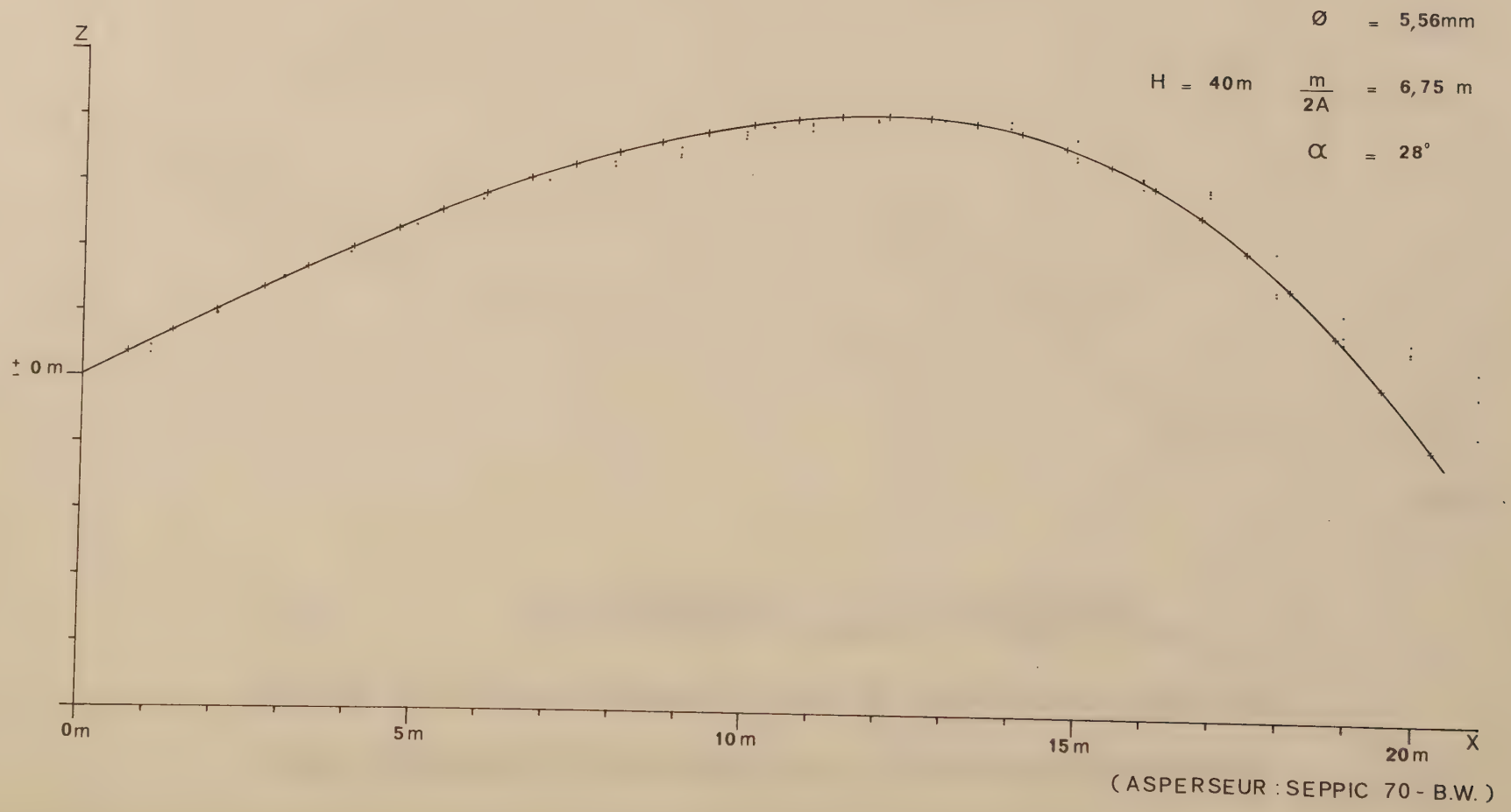
Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique pour :

$$Z = \left(\frac{m}{4AH\cos^2\alpha} + tg\alpha\right)x - \frac{m^2}{8A^2H\cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1\right)$$



Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique pour :

$$Z = \left(\frac{m}{4AH\cos^2\alpha} + tg\alpha\right)x - \frac{m^2}{8A^2H\cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1\right)$$



(ASPERSEUR : SEPPIC 70 - B.W.)

La formule approchée

$$Z = \left(\frac{m}{4\,AH\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \right) x - \frac{m^2}{8\,A^2\,H\cos^2\alpha} \left(e^{\frac{2Ax}{m}} - 1 \right)$$

rend correctement compte des phénomènes observés.

Nous verrons en conclusion de l'étude de la granulométrie que les valeurs trouvées pour les différents termes $\frac{m}{2A}$ sont très significatifs.

9. CONCLUSIONS GENERALES DE L'ETUDE BALISTIQUE

A ce stade de l'étude, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

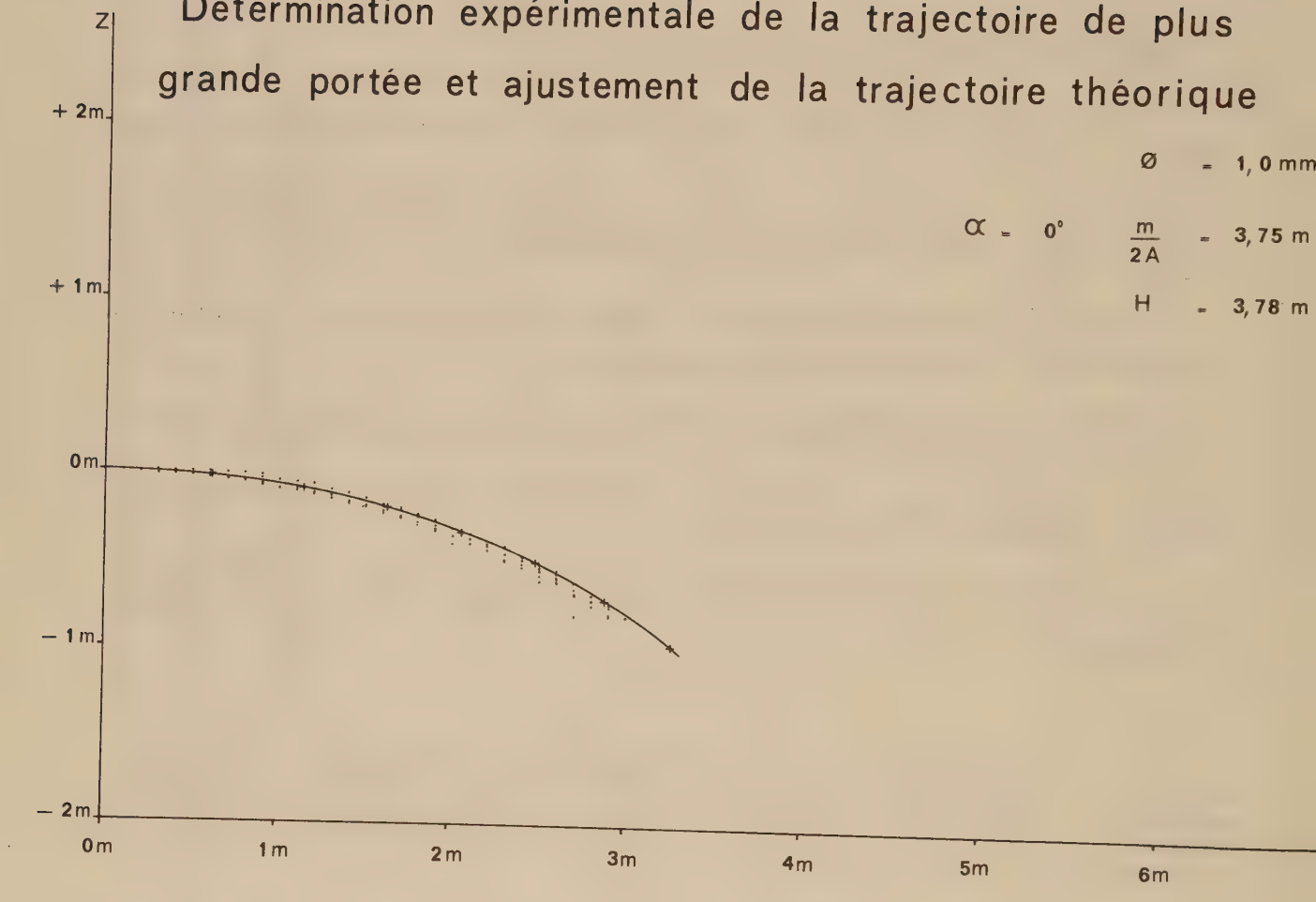
- l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse rend compte d'une manière satisfaisante de l'allure des courbes trajectoires ;
- le terme $\frac{m}{2A}$ est indépendant de l'angle de tir mais est fonction du diamètre de l'ajutage et de la pression ;
- l'ensemble des hypothèses utilisées dans l'étude mathématique du chapitre 3 ne sont pas infirmées par les résultats expérimentaux ;
- l'étude mathématique rend compte du phénomène physique de la transformation progressive du jet en gouttes.

Il nous reste maintenant à expliciter la valeur du coefficient A et en déduire la valeur du coefficient de trainée C_x des gouttes d'après la relation

$$A = \frac{1}{2} \; C_x \; \rho' S$$

Pour celà, il nous faut déterminer la valeur de la masse m des gouttes. Ce sera l'objet de la troisième partie consacrée à la granulométrie des asperseurs. En annexe de cette seconde partie, nous avons fait figurer l'ensemble de nos résultats expérimentaux et théoriques ainsi que les graphiques s'y rapportant.

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 0°$

H = 3, 78 m C.E.

Ajutage : Ø = 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	- 0, 4	- 0, 3	- 0, 3	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
20	- 1, 0	- 0, 7	- 0, 6	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
30	- 1, 4	- 1, 1	- 1, 0	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
40	- 2, 0	- 1, 6	- 1, 4	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
50	- 2, 8	- 2, 4	- 2, 3	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
60	- 4, 0	- 3, 5	- 2, 5	- 0, 5	- 0, 5	- 0, 5
70	- 5, 0	- 4, 5	- 4, 0	- 1, 0	- 1, 0	- 1, 0
80	- 6, 5	- 5, 5	- 5, 0	- 1, 0	- 2, 0	- 2, 0
90	- 8, 0	- 7, 0	- 6, 5	- 2, 5	- 3, 5	- 2, 5
1.00	- 9, 5	- 8, 5	- 8, 5	- 4, 5	- 5, 0	- 4, 5
10	-11, 0	-10, 5	- 9, 5	- 5, 5	- 6, 0	- 5, 5
20	-13, 0	-12, 0	-11, 5	- 7, 0	- 7, 5	- 7, 5
30	-15, 5	-14, 5	-13, 5	-10, 0	-10, 5	- 9, 5
40	-18, 0	-17, 0	-16, 0	-11, 5	-12, 5	-11, 5
50	-20, 5	-19, 0	-18, 5	-15, 0	-15, 5	-15, 5
60	-23, 5	-22, 0	-21, 5	-18, 5	-19, 0	-18, 0
70	-26, 0	-25, 0	-24, 5	-20, 5	-21, 5	-20, 5
80	-29, 5	-28, 5	-27, 5	-24, 0	-25, 0	-24, 0
90	-33, 0	-32, 0	-30, 5	-27, 0	-27, 5	-27, 0
2.00	-36, 5	-35, 5	-40, 5	-31, 5	-31, 5	-31, 5
10	-40, 0	-40, 0	-37, 5	-35, 0	-35, 5	-34, 5
20	-44, 5	-44, 5	-41, 5	-40, 5	-40, 5	-38, 5
30	-49, 0	-50, 0	-46, 5	-41, 5	-42, 5	-42, 5
40	-53, 5	-54, 5	-51, 5	-47, 5	-49, 5	-47, 0
50	-61, 0	-58, 0	-55, 5	-52, 5	-54, 5	-52, 0
60	-62, 0	-62, 5	-60, 0	-57, 0	-59, 0	-55, 5
70	-68, 5	-69, 0	-65, 5	-81, 5	-61, 5	-61, 5
80	-72, 5	-75, 5	-72, 5	-71, 5	-71, 5	-69, 0
90	-81, 0	-80, 5	-76, 0	-81, 0	-79, 0	-74, 5
3.00				-81, 0	-81, 0	-81, 0

RESULTATS THEORIQUES

$\alpha = 0°$

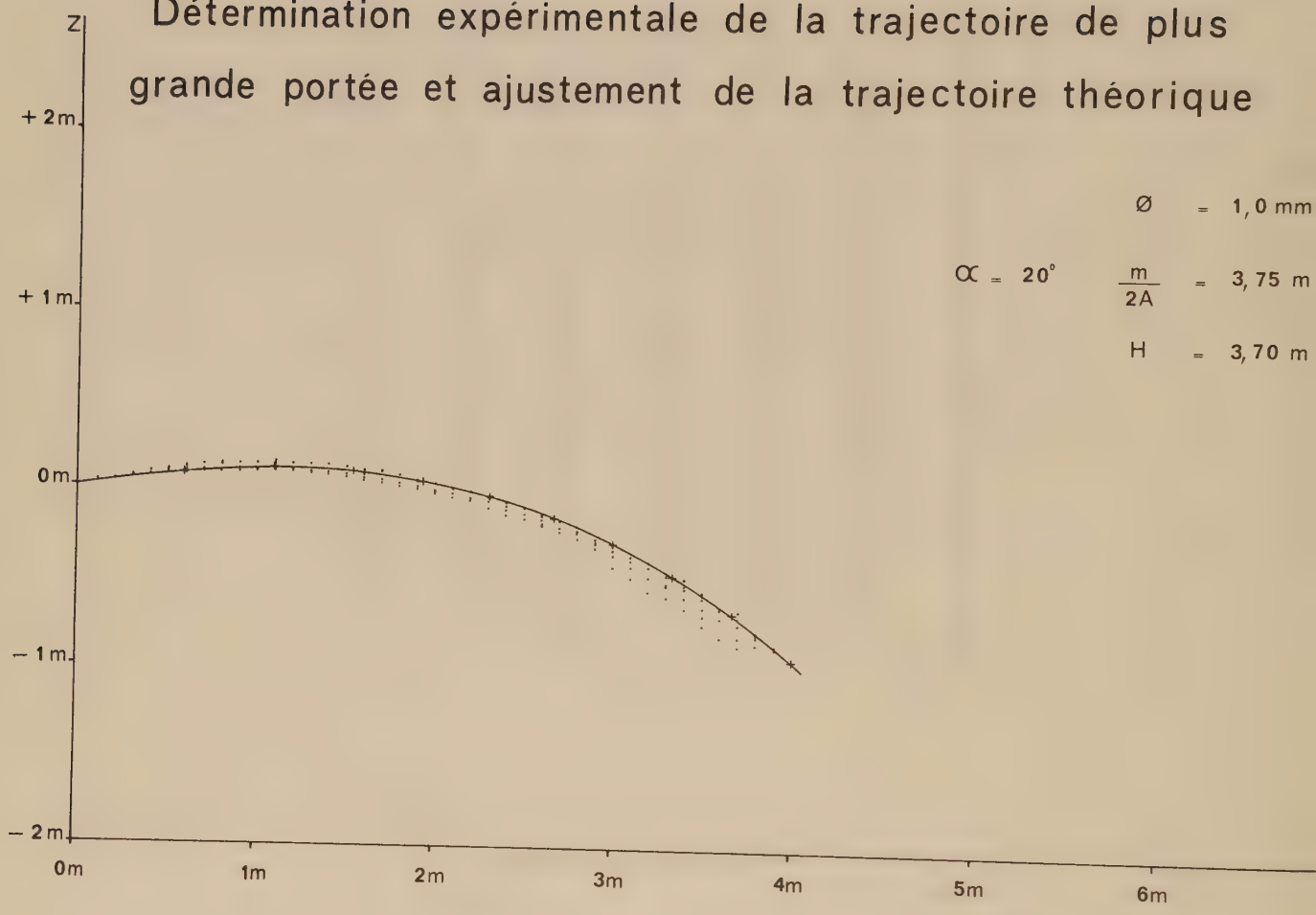
H = 3, 78 m

$\frac{m}{2A}$ = 3, 75 m

Ajutage : Ø = 1 mm

φ	X cm	Y cm
- 5°	60, 9	- 2, 5
-10°	113, 9	- 9, 4
-15°	161, 7	-20, 0
-20°	205, 8	-33, 9
-25°	247, 5	-51, 1
-30°	287, 5	-72, 0
-35°	326, 7	-97, 0

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 10°

H = 3, 70 m C.E.

Ajutage : Ø = 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 1, 5	+ 1, 5	+ 1, 5	+ 1, 5	+ 1, 5	+ 1, 5
20	+ 2, 5	+ 2, 5	+ 3, 0	+ 3, 0	+ 3, 0	+ 3, 0
30	+ 4, 0	+ 3, 5	+ 4, 0	+ 5, 0	+ 5, 0	+ 5, 0
40	+ 5, 0	+ 5, 0	+ 5, 5	+ 7, 0	+ 7, 0	+ 7, 0
50	+ 6, 0	+ 6, 0	+ 6, 5	+ 8, 5	+ 8, 5	+ 8, 5
60	+ 6, 5	+ 6, 5	+ 7, 0	+ 9, 5	+10, 5	+10, 0
70	+ 7, 0	+ 7, 0	+ 8, 0	+11, 0	+11, 0	+11, 0
80	+ 7, 5	+ 7, 5	+ 8, 5	+11, 5	+11, 5	+12, 0
90	+ 7, 5	+ 8, 0	+ 9, 0	+12, 0	+12, 0	+12, 0
1.00	+ 7, 5	+ 8, 0	+ 8, 5	+12, 5	+12, 0	+12, 5
10	+ 7, 0	+ 7, 5	+ 8, 5	+12, 5	+12, 0	+13, 0
20	+ 7, 0	+ 7, 0	+ 8, 0	+12, 0	+11, 5	+11, 5
30	+ 6, 5	+ 6, 5	+ 7, 5	+11, 5	+11, 5	+11, 5
40	+ 5, 5	+ 6, 0	+ 7, 0	+11, 0	+10, 5	+10, 5
50	+ 4, 5	+ 5, 0	+ 6, 0	+ 9, 5	+10, 0	+ 9, 0
60	+ 3, 0	+ 4, 0	+ 6, 0	+ 9, 0	+ 9, 0	+ 8, 5
70	+ 2, 0	+ 1, 5	+ 3, 5	+ 7, 5	+ 8, 0	+ 7, 0
80	- 0, 5	$\pm$ 0, 0	+ 2, 0	+ 5, 5	+ 6, 0	+ 5, 0
90	- 2, 0	- 1, 5	- 0, 5	+ 3, 0	+ 4, 0	+ 4, 5
2.00	- 4, 5	- 3, 0	- 2, 0	+ 1, 5	+ 1, 5	+ 1, 5
10	- 6, 0	- 6, 0	- 4, 5	- 1, 5	- 0, 5	- 1, 0
20	- 8, 5	- 8, 5	- 7, 0	- 3, 0	- 3, 0	- 2, 5
30	-12, 0	-11, 5	- 8, 5	- 6, 5	- 6, 5	- 6, 5
40	-13, 0	-16, 0	-11, 5	- 9, 5	- 9, 5	- 8, 5
50	-18, 5	-18, 5	-15, 0	-11, 5	-11, 0	-11, 0
60	-20, 5	-21, 5	-18, 0	-16, 0	-15, 5	-15, 0
70	-25, 0	-25, 5	-22, 5	-18, 5	-19, 0	-18, 5
80	-29, 0	-29, 5	-26, 0	-23, 5	-23, 5	-21, 5
90	-31, 5	-34, 5	-30, 5	-27, 0	-27, 0	-28, 5
3.00	-37, 5	-44, 5	-35, 0	-32, 0	-31, 5	-32, 0
10	-43, 5	-50, 5	-40, 5	-38, 0	-37, 0	-37, 5
20	-50, 5	-58, 0	-44, 5	-41, 0	-40, 5	-41, 0
30	-55, 0	-61, 0	-53, 0	-47, 5	-47, 5	-47, 5
40	-61, 0	-67, 0	-56, 5	-50, 5	-55, 0	-54, 5
50	-66, 0	-77, 5	-61, 0	-59, 5	-57, 5	-59, 5
60	-72, 0	-83, 0	-67, 0	-66, 0	-65, 0	-65, 5
70	-76, 5	-87, 5	-73, 0	-71, 5	-68, 5	-71, 0
80	-87, 0		-82, 5	-81, 0	-80, 0	-81, 0
90	-89, 0		-88, 0	-89, 0	-89, 0	-89, 0

RESULTATS THEORIQUES

α = 10°

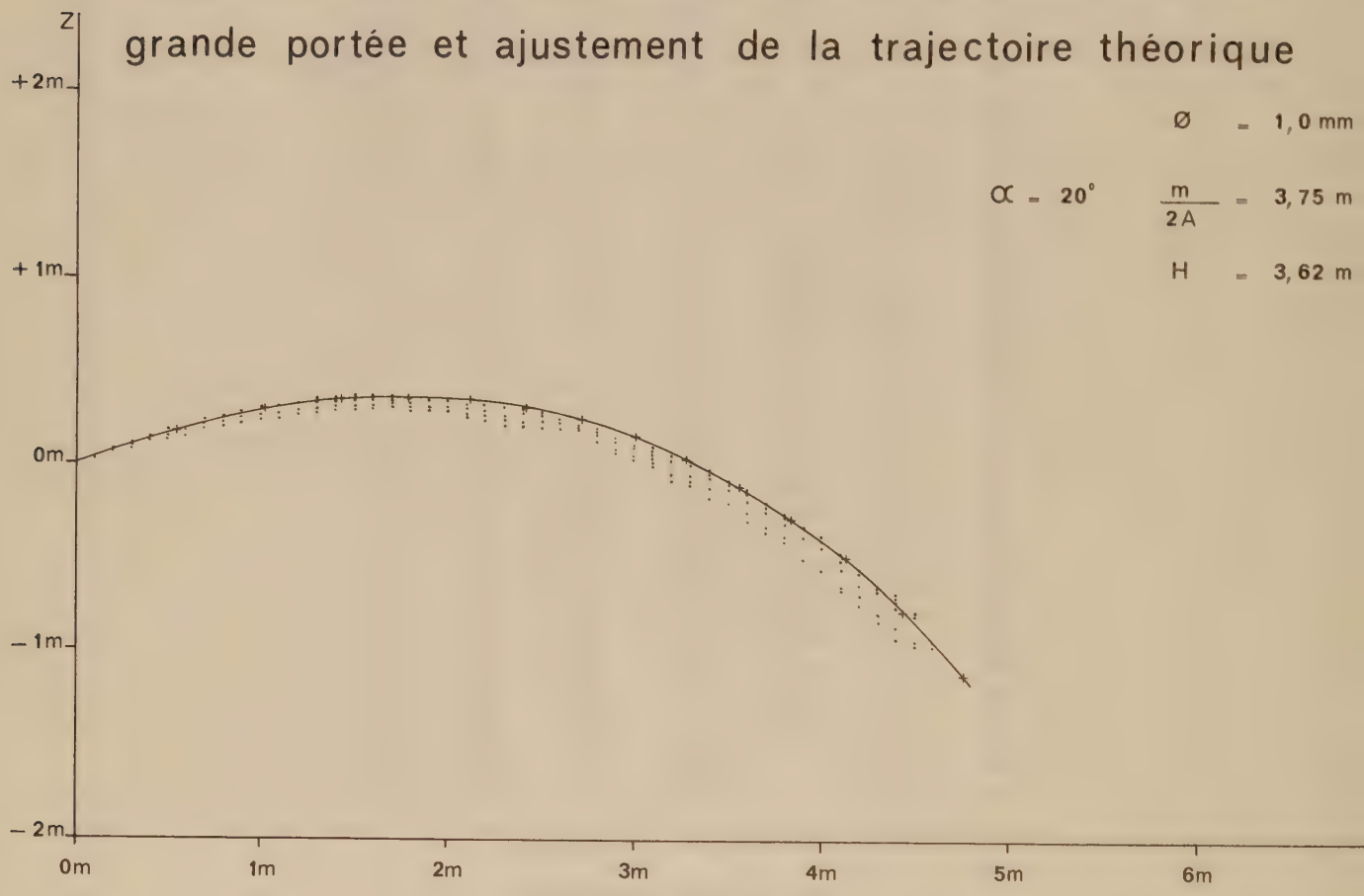
H = 3, 70 m

$\frac{m}{2A}$ = 3, 75 m

Ajutage : Ø = 1 mm

φ	X cm	Y cm
+ 5°	58, 8	+ 7, 8
0°	108, 8	+ 10, 0
- 5°	153, 0	+ 8, 1
- 10°	193, 1	+ 2, 9
- 15°	230, 3	- 5, 3
- 20°	265, 6	- 16, 4
- 25°	299, 7	- 30, 5
- 30°	333, 2	- 48, 0
- 35°	366, 6	- 69, 3
- 40°	400, 4	- 95, 3

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 20°$

H = 3 , 62 m C.E

Ajutage : Ø 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 3, 5	+ 3, 0	+ 3, 0	+ 3, 5	+ 3, 5	+ 3, 5
20	+ 6, 5	+ 6, 0	+ 6, 0	+ 7, 5	+ 7, 5	+ 7, 5
30	+ 9, 5	+ 8, 5	+ 9, 5	+11, 5	+11, 0	+11, 0
40	+12, 5	+12, 0	+12, 5	+15, 0	+15, 0	+15, 0
50	+15, 0	+14, 5	+15, 5	+18, 0	+18, 5	+18, 0
60	+17, 0	+16, 5	+20, 5	+21, 0	+21, 0	+21, 0
70	+19, 5	+19, 0	+21, 0	+22, 5	+22, 0	+23, 5
80	+21, 5	+20, 5	+22, 5	+26, 0	+26, 5	+25, 5
90	+23, 5	+22, 5	+24, 5	+28, 5	+28, 0	+28, 5
1.00	+24, 5	+24, 5	+26, 0	+29, 5	+29, 5	+30, 5
10	+26, 0	+25, 0	+27, 5	+31, 5	+32, 0	+31, 5
20	+27, 5	+27, 0	+29, 0	+33, 5	+33, 5	+33, 0
30	+28, 5	+28, 0	+30, 0	+35, 0	+35, 5	+34, 0
40	+29, 0	+28, 0	+30, 5	+36, 0	+36, 5	+34, 5
50	+29, 5	+28, 5	+31, 5	+36, 5	+37, 0	+35, 0
60	+29, 5	+29, 0	+32, 0	+36, 0	+37, 0	+36, 5
70	+30, 0	+29, 0	+32, 5	+35, 5	+36, 5	+37, 0
80	+30, 0	+28, 0	+32, 0	+35, 0	+36, 0	+35, 0
90	+29, 0	+28, 0	+31, 5	+34, 5	+35, 5	+34, 5
2.00	+28, 0	+27, 0	+31, 0	+34, 0	+35, 0	+34, 5
10	+27, 0	+25, 5	+30, 0	+33, 5	+33, 5	+33, 0
20	+26, 0	+24, 0	+29, 0	+32, 5	+31, 5	+32, 0
30	+24, 5	+22, 5	+26, 5	+32, 0	+31, 0	+31, 0
40	+23, 5	+20, 5	+26, 0	+30, 0	+29, 5	+28, 0
50	+21, 5	+19, 0	+23, 0	+28, 0	+27, 5	+26, 5
60	+19, 5	+15, 5	+22, 0	+25, 5	+24, 0	+23, 5
70	+15, 5	+13, 0	+18, 0	+22, 5	+21, 0	+20, 5
80	+13, 0	+ 9, 5	+16, 0	+20, 0	+19, 0	+18, 5
90	+ 8, 5	+ 6, 5	+13, 0	+15, 0	+14, 5	+15, 0
3.00	+ 4, 5	+ 3, 0	+ 9, 0	+11, 0	+11, 5	+11, 0
10	+ 2, 0	- 2, 0	+ 4, 0	+ 6, 5	+ 7, 0	+ 8, 0
20	- 5, 0	- 8, 5	+ 0, 5	+ 2, 5	+ 2, 5	+ 4, 5
30	- 8, 5	-11, 5	- 5, 5	- 0, 5	± 0, 0	+ 1, 0
40	-16, 5	-18, 5	- 7, 5	- 4, 5	- 5, 0	- 4, 0
50	-20, 5	-21, 5	-13, 0	-11, 0	-11, 0	- 9, 0
60	-25, 5	-30, 5	-19, 0	-16, 0	-15, 5	-13, 0
70	-33, 5	-36, 0	-24, 0	-20, 0	-21, 5	-21, 5
80	-39, 0	-41, 0	-32, 5	-26, 5	-27, 0	-26, 5
90	-50, 0	-50, 5	-38, 5	-33, 0	-35, 0	-33, 5
4.00	-55, 0	-56, 5	-44, 0	-40, 5	-40, 0	-38, 0
10	-65, 0	-66, 0	-55, 5	-51, 5	-51, 5	-46, 0
20	-70, 0	-75, 5	-64, 0	-56, 0	-57, 0	-56, 5
30	-79, 0	-84, 5	-66, 0	-65, 5	-66, 5	-65, 0
40	-86, 5	-93, 0	-75, 0	-71, 0	-72, 5	-68, 5
50	-96, 0	-95, 0	-81, 5	-82, 5	-80, 0	-82, 5
60			-95, 0	-96, 0	-96, 0	-96, 0

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

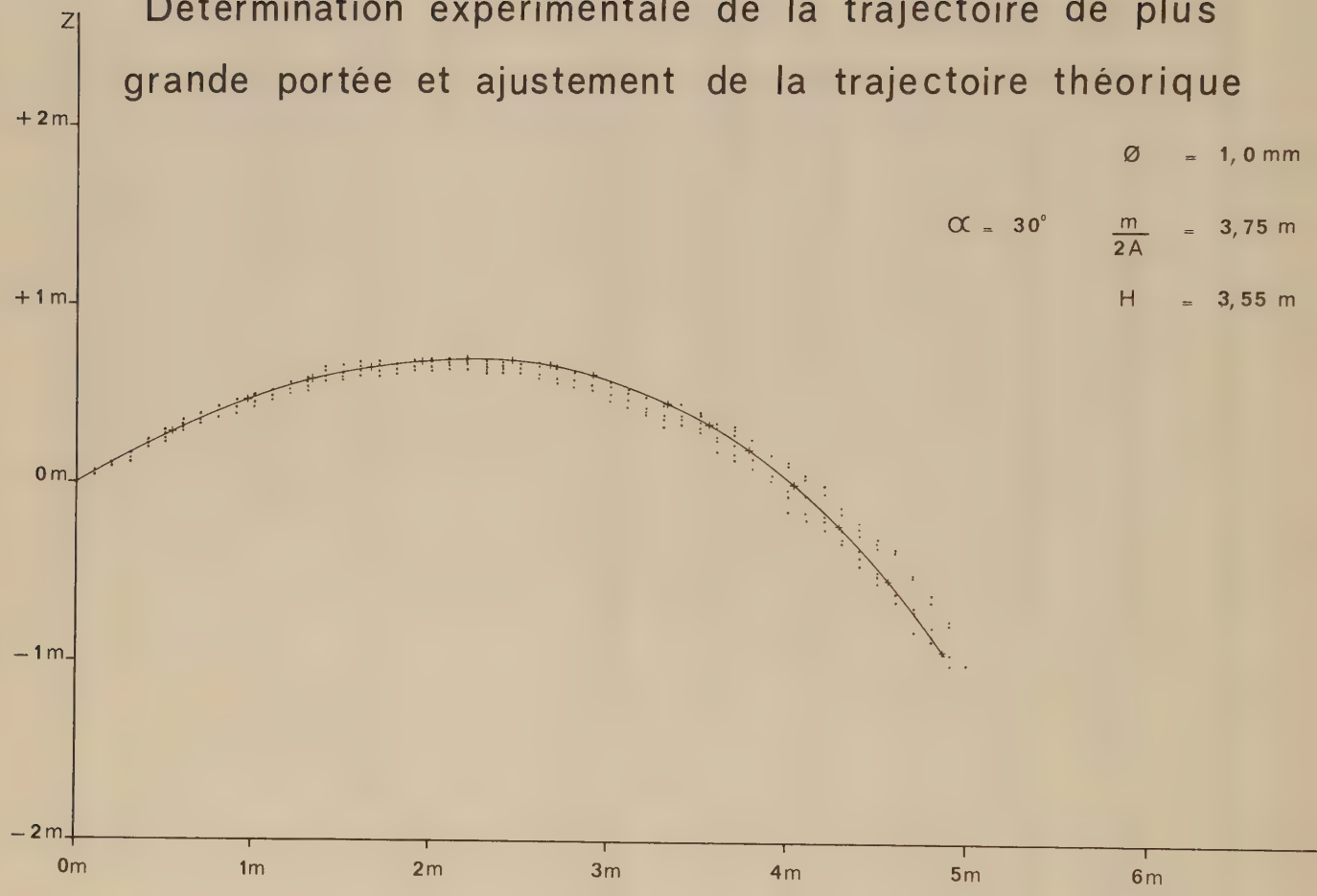
$\alpha = 20°$

H = 3, 62 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 3, 75$ m

φ	X cm	Y cm
+ 15°	56, 7	+ 17, 9
+ 10°	103, 6	+ 28, 4
+ 5°	144, 1	+ 33, 8
0°	180, 0	+ 35, 3
- 5°	212, 8	+ 34, 0
- 10°	243, 4	+ 29, 9
- 15	272, 5	+ 23, 5
- 20°	300, 7	+ 14, 6
- 25°	328, 5	+ 3, 1
- 30°	356, 2	- 11, 2
- 35°	384, 4	- 29, 2
- 40°	413, 4	- 51, 5
- 45°	443, 6	- 79, 3
- 50°	475, 7	-114, 4

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 30°$

Ajutage : Ø = 1 mm

H = 3, 55 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 4, 5	+ 5, 0	+ 6, 0	+ 5, 5	+ 6, 0	+ 6, 0
20	+ 10, 5	+ 10, 0	+ 10, 5	+ 12, 0	+ 12, 0	+ 12, 0
30	+ 15, 5	+ 15, 5	+ 13, 0	+ 17, 5	+ 17, 5	+ 17, 5
40	+ 20, 0	+ 20, 5	+ 20, 5	+ 24, 0	+ 23, 5	+ 24, 0
50	+ 24, 0	+ 25, 0	+ 25, 5	+ 28, 0	+ 28, 5	+ 29, 5
60	+ 30, 0	+ 29, 0	+ 30, 0	+ 32, 5	+ 33, 5	+ 34, 5
70	+ 33, 5	+ 33, 0	+ 34, 5	+ 38, 0	+ 38, 0	+ 39, 0
80	+ 37, 0	+ 37, 0	+ 37, 5	+ 42, 0	+ 42, 0	+ 42, 5
90	+ 39, 5	+ 42, 0	+ 42, 5	+ 46, 5	+ 46, 5	+ 46, 5
1.00	+ 43, 5	+ 45, 0	+ 46, 0	+ 50, 0	+ 50, 0	+ 50, 0
10	+ 47, 0	+ 47, 5	+ 49, 0	+ 53, 0	+ 53, 5	+ 53, 0
20	+ 50, 0	+ 50, 5	+ 52, 4	+ 56, 0	+ 56, 0	+ 56, 0
30	+ 52, 5	+ 52, 5	+ 55, 0	+ 57, 0	+ 58, 5	+ 58, 0
40	+ 54, 5	+ 56, 0	+ 57, 5	+ 59, 5	+ 60, 0	+ 61, 0
50	+ 57, 0	+ 57, 5	+ 60, 0	+ 62, 5	+ 62, 5	+ 64, 5
60	+ 58, 0	+ 59, 5	+ 61, 5	+ 65, 0	+ 65, 0	+ 65, 5
70	+ 60, 0	+ 60, 5	+ 63, 0	+ 66, 5	+ 67, 0	+ 66, 5
80	+ 61, 0	+ 62, 5	+ 64, 0	+ 67, 5	+ 67, 5	+ 67, 5
90	+ 62, 0	+ 62, 5	+ 65, 0	+ 68, 5	+ 68, 5	+ 69, 0
2.00	+ 63, 0	+ 63, 5	+ 65, 5	+ 69, 0	+ 70, 0	+ 70, 0
10	+ 63, 0	+ 63, 5	+ 66, 0	+ 68, 0	+ 69, 0	+ 69, 0
20	+ 63, 0	+ 63, 5	+ 66, 0	+ 68, 0	+ 68, 5	+ 69, 0
30	+ 62, 0	+ 64, 0	+ 65, 5	+ 67, 5	+ 68, 5	+ 68, 5
40	+ 61, 5	+ 62, 0	+ 64, 5	+ 67, 0	+ 68, 0	+ 68, 0
50	+ 60, 5	+ 59, 5	+ 64, 0	+ 67, 0	+ 67, 0	+ 67, 0
60	+ 59, 0	+ 59, 0	+ 61, 0	+ 66, 0	+ 66, 5	+ 66, 5
70	+ 58, 5	+ 58, 0	+ 59, 0	+ 64, 5	+ 64, 5	+ 66, 0
80	+ 54, 0	+ 58, 0	+ 58, 0	+ 62, 5	+ 62, 5	+ 63, 0
90	+ 52, 0	+ 52, 5	+ 55, 5	+ 59, 5	+ 60, 0	+ 60, 5
3.00	+ 50, 5	+ 49, 5	+ 53, 5	+ 57, 0	+ 57, 0	+ 59, 0
10	+ 47, 5	+ 46, 5	+ 50, 0	+ 55, 5	+ 56, 0	+ 57, 5
20	+ 42, 5	+ 43, 0	+ 46, 5	+ 52, 5	+ 52, 0	+ 53, 0
30	+ 40, 0	+ 39, 5	+ 43, 0	+ 48, 5	+ 48, 5	+ 48, 5
40	+ 36, 0	+ 32, 5	+ 38, 0	+ 44, 0	+ 43, 5	+ 44, 5
50	+ 29, 0	+ 31, 0	+ 34, 5	+ 39, 5	+ 40, 0	+ 40, 5
60	+ 18, 0	+ 24, 5	+ 26, 5	+ 32, 0	+ 34, 5	+ 35, 0
70	+ 14, 0	+ 17, 5	+ 21, 5	+ 28, 5	+ 32, 0	+ 30, 5
80	+ 9, 5	+ 9, 5	+ 14, 5	+ 25, 5	+ 25, 0	+ 25, 0
90	- 4, 0	+ 5, 0	+ 3, 0	+ 17, 5	+ 17, 5	+ 17, 5
4.00	- 15, 5	- 6, 0	- 3, 5	+ 12, 0	+ 12, 5	+ 11, 0
10	- 20, 5	- 16, 0	- 7, 5	+ 3, 5	+ 4, 5	+ 2, 5
20	- 25, 5	- 19, 5	- 21, 0	- 1, 0	- 1, 0	- 5, 5
30	- 33, 5	- 25, 5	- 31, 5	- 16, 0	- 14, 5	- 13, 5
40	- 41, 0	- 37, 0	- 45, 0	- 28, 0	- 25, 0	- 21, 0
50	- 55, 5	- 49, 5	- 51, 5	- 35, 5	- 30, 5	- 33, 5
60	- 62, 0	- 66, 5	- 62, 0	- 37, 0	- 38, 0	- 38, 0
70	- 83, 0	- 72, 5	- 69, 5	- 52, 5	- 51, 0	- 51, 5
80	- 87, 0	- 85, 0	- 80, 5	- 64, 5	- 60, 0	- 60, 5
90	-103, 5	- 95, 5	- 95, 5	- 78, 0	- 77, 5	- 76, 0
5.00		-102, 0	-102, 5	-103, 5	-103, 5	-103, 5

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

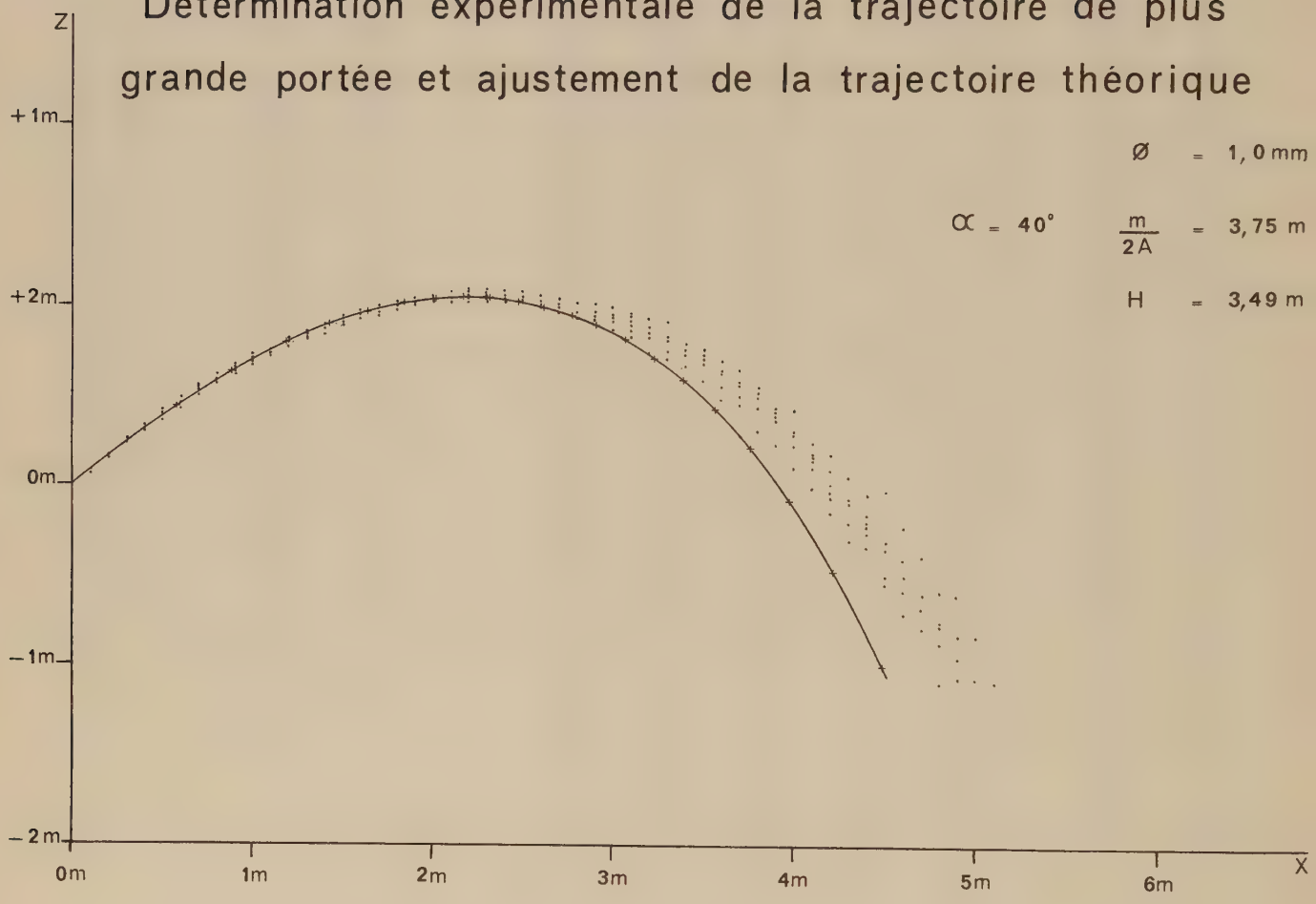
$\alpha = 30°$

H = 3, 55 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 3, 75$ m

φ	X cm	Y cm
+ 25°	54, 5	+ 28, 5
+ 20°	98, 0	+ 46, 6
+ 15°	134, 4	+ 58, 1
+ 10°	166, 0	+ 65, 2
+ 5°	194, 4	+ 68, 9
0°	220, 3	+ 70, 0
- 5°	244, 5	+ 69, 0
- 10°	267, 6	+ 66, 0
- 15°	290, 0	+ 61, 0
- 20°	312, 1	+ 54, 0
- 25°	334, 2	+ 44, 9
- 30°	356, 6	+ 33, 2
- 35°	379, 8	+ 18, 4
- 40°	404, 0	- 0, 1
- 45°	429, 7	- 23, 7
- 50°	457, 4	- 54, 0
- 55°	487, 7	- 93, 6

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 40°$

H = 3, 49 m C.E.

Ajutage : Ø 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 8, 5	+ 7, 5	+ 8, 0	+ 7, 5	+ 7, 0	+ 7, 0
20	+ 16, 5	+ 15, 5	+ 15, 5	+ 14, 5	+ 17, 5	+ 16, 0
30	+ 24, 0	+ 24, 0	+ 23, 0	+ 24, 5	+ 25, 0	+ 25, 5
40	+ 32, 0	+ 31, 0	+ 30, 0	+ 33, 5	+ 32, 5	+ 33, 0
50	+ 39, 0	+ 37, 0	+ 38, 0	+ 39, 5	+ 40, 0	+ 41, 5
60	+ 45, 5	+ 43, 5	+ 44, 0	+ 46, 5	+ 48, 5	+ 48, 0
70	+ 51, 5	+ 50, 5	+ 50, 5	+ 53, 0	+ 55, 5	+ 53, 5
80	+ 57, 5	+ 56, 0	+ 56, 5	+ 58, 5	+ 61, 0	+ 59, 5
90	+ 63, 0	+ 62, 0	+ 62, 5	+ 65, 0	+ 66, 5	+ 66, 0
1.00	+ 68, 0	+ 67, 0	+ 68, 0	+ 70, 5	+ 72, 0	+ 71, 5
10	+ 73, 5	+ 72, 0	+ 72, 5	+ 75, 5	+ 75, 5	+ 75, 0
20	+ 78, 5	+ 77, 0	+ 78, 5	+ 81, 0	+ 80, 5	+ 79, 5
30	+ 82, 5	+ 80, 0	+ 81, 0	+ 85, 5	+ 85, 5	+ 84, 0
40	+ 85, 5	+ 84, 0	+ 85, 5	+ 88, 5	+ 88, 5	+ 88, 5
50	+ 89, 0	+ 88, 0	+ 89, 0	+ 92, 0	+ 93, 5	+ 92, 5
60	+ 92, 5	+ 91, 5	+ 92, 0	+ 95, 5	+ 95, 5	+ 95, 0
70	+ 97, 5	+ 94, 5	+ 95, 0	+ 99, 0	+ 97, 5	+ 98, 5
80	+ 99, 5	+ 97, 0	+ 98, 0	+100, 0	+ 99, 5	+ 99, 5
90	+100, 5	+ 98, 5	+100, 0	+102, 5	+101, 5	+101, 5
2.00	+103, 0	+100, 0	+102, 0	+105, 0	+102, 5	+103, 5
10	+103, 0	+100, 5	+102, 5	+106, 0	+103, 5	+103, 5
20	+103, 0	+102, 0	+103, 0	+107, 0	+106, 0	+104, 0
30	+102, 0	+102, 5	+104, 0	+107, 0	+104, 5	+106, 5
40	+101, 5	+101, 0	+104, 5	+107, 5	+104, 0	+104, 0
50	+101, 0	+100, 0	+103, 5	+107, 5	+103, 5	+103, 0
60	+ 98, 0	+ 99, 5	+102, 0	+105, 5	+103, 0	+100, 5
70	+ 95, 5	+ 98, 5	+101, 5	+104, 0	+102, 0	+ 98, 5
80	+ 92, 5	+ 95, 5	+101, 0	+103, 0	+ 98, 5	+100, 0
90	+ 90, 5	+ 94, 0	+ 96, 5	+100, 0	+ 95, 0	+ 94, 5
3.00	+ 85, 0	+ 92, 0	+ 92, 0	+ 98, 5	+ 93, 0	+ 90, 0
10	+ 81, 5	+ 88, 0	+ 90, 5	+ 94, 5	+ 92, 5	+ 85, 5
20	+ 73, 5	+ 84, 0	+ 87, 5	+ 92, 5	+ 87, 0	+ 81, 0
30	+ 69, 5	+ 74, 5	+ 80, 5	+ 89, 5	+ 82, 0	+ 78, 5
40	+ 65, 5	+ 71, 5	+ 73, 0	+ 77, 5	+ 75, 5	+ 73, 5
50	+ 57, 0	+ 66, 0	+ 68, 0	+ 74, 5	+ 72, 0	+ 66, 5
60	+ 47, 5	+ 54, 5	+ 60, 5	+ 67, 5	+ 58, 5	+ 62, 0
70	+ 44, 0	+ 48, 0	+ 56, 5	+ 63, 5	+ 54, 5	+ 53, 5
80	+ 29, 5	+ 42, 5	+ 49, 0	+ 53, 5	+ 51, 0	+ 44, 5
90	+ 22, 0	+ 36, 0	+ 38, 0	+ 42, 5	+ 40, 0	+ 35, 5
4.00	+ 8, 0	+ 21, 5	+ 29, 5	+ 40, 5	+ 28, 5	+ 26, 5
10	- 3, 5	+ 18, 0	+ 14, 5	+ 22, 5	+ 16, 5	+ 15, 5
20	- 16, 5	- 1, 0	+ 6, 0	+ 16, 5	- 8, 5	+ 5, 5
30	- 31, 0	- 11, 0	- 4, 5	+ 4, 5	- 21, 5	- 8, 5
40	- 35, 5	- 24, 0	- 16, 0	- 5, 0	- 27, 0	- 23, 5
50	- 55, 0	- 33, 5	- 36, 0	- 4, 5	- 51, 0	- 35, 5
60	- 71, 5	- 51, 0	- 59, 5	- 24, 0	- 59, 5	- 42, 0
70	- 80, 0	- 66, 5	- 67, 5	- 40, 5	- 61, 5	- 61, 5
80	-110, 5	- 77, 0	- 71, 5	- 59, 0	- 76, 0	- 88, 0
90		- 96, 5	- 84, 5	- 61, 0	-108, 5	
5.00		-108, 5	-108, 5	- 84, 0		
10				-110, 5		

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø = 1 mm

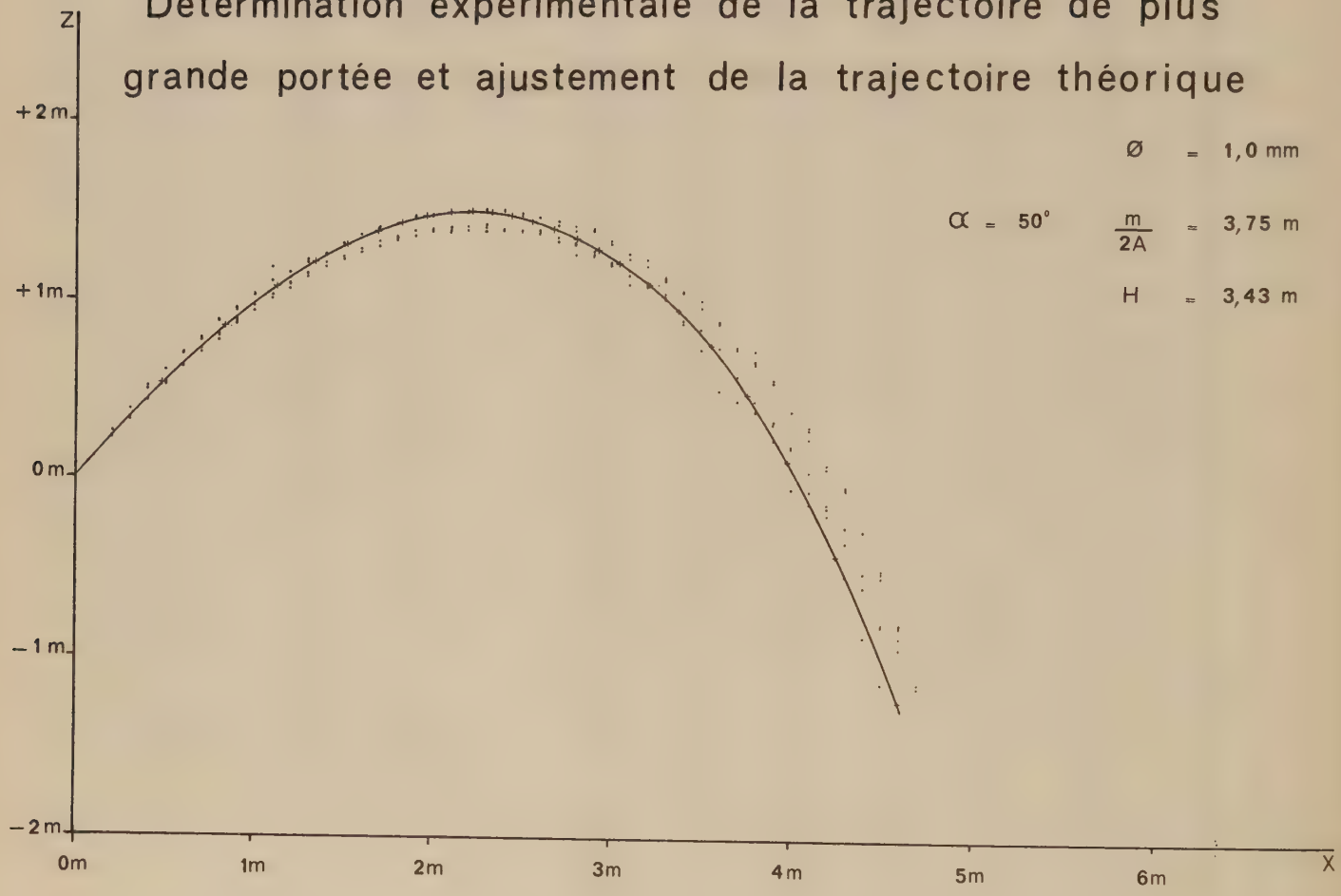
$\alpha = 40°$

H = 3, 49 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 3, 75$

φ	X cm	Y cm
+ 35°	50, 8	+ 39, 2
+ 30°	88, 4	+ 63, 3
+ 25°	118, 3	+ 78, 9
+ 20°	143, 1	+ 89, 2
+ 15°	164, 6	+ 96, 0
+ 10°	183, 7	+100, 3
+ 5°	201, 2	+102, 6
0°	217, 4	+103, 3
- 5°	232, 8	+102, 6
- 10°	247, 6	+100, 7
- 15°	262, 2	+ 97, 5
- 20°	276, 7	+ 92, 9
- 25°	291, 4	+ 86, 8
- 30°	306, 5	+ 78, 9
- 35°	322, 2	+ 68, 9
- 40°	338, 9	+ 56, 1
- 45°	356, 8	+ 39, 6
- 50°	376, 3	+ 18, 3
- 55°	397, 9	- 9, 9
- 60°	422, 1	- 48, 1
- 65°	449, 8	-101, 5

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 50°

H = 3, 43 m C.E.

Ajutage : Ø = 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 12, 0	+ 12, 0	+ 13, 0	+ 13, 0	+ 12, 0	+ 13, 0
20	+ 22, 5	+ 21, 5	+ 23, 0	+ 26, 0	+ 25, 0	+ 26, 0
30	+ 34, 0	+ 32, 5	+ 33, 0	+ 38, 5	+ 38, 5	+ 38, 5
40	+ 44, 0	+ 43, 0	+ 43, 5	+ 51, 0	+ 49, 5	+ 50, 0
50	+ 52, 5	+ 53, 0	+ 52, 5	+ 60, 0	+ 60, 5	+ 60, 5
60	+ 62, 0	+ 61, 5	+ 61, 5	+ 70, 0	+ 69, 0	+ 70, 5
70	+ 72, 5	+ 71, 0	+ 70, 0	+ 77, 5	+ 78, 0	+ 78, 5
80	+ 80, 5	+ 79, 5	+ 77, 5	+ 88, 5	+ 87, 0	+ 87, 5
90	+ 87, 0	+ 88, 0	+ 86, 5	+ 94, 5	+ 95, 5	+ 95, 5
1.00	+ 93, 5	+ 96, 5	+ 94, 5	+102, 5	+103, 0	+102, 0
10	+100, 5	+102, 0	+101, 0	+110, 0	+110, 0	+118, 5
20	+107, 0	+108, 5	+105, 5	+115, 5	+115, 5	+115, 0
30	+113, 5	+114, 5	+112, 0	+120, 5	+122, 5	+121, 5
40	+118, 5	+120, 5	+118, 5	+125, 5	+126, 0	+126, 0
50	+122, 5	+123, 5	+122, 0	+131, 0	+129, 5	+130, 0
60	+127, 5	+128, 5	+126, 5	+136, 0	+136, 0	+135, 5
70	+131, 5	+132, 0	+128, 5	+139, 5	+139, 5	+140, 0
80	+135, 0	+134, 0	+132, 5	+142, 0	+142, 0	+141, 5
90	+137, 5	+137, 5	+135, 0	+144, 5	+144, 5	+145, 0
2.00	+138, 5	+139, 0	+137, 0	+147, 0	+146, 0	+146, 5
10	+138, 5	+140, 0	+137, 5	+148, 5	+148, 5	+148, 5
20	+138, 5	+140, 5	+139, 5	+149, 0	+149, 0	+148, 5
30	+137, 5	+141, 5	+140, 0	+150, 0	+149, 5	+149, 0
40	+137, 5	+139, 0	+137, 5	+149, 5	+149, 5	+148, 5
50	+137, 0	+138, 0	+137, 5	+147, 5	+146, 5	+146, 5
60	+136, 5	+138, 0	+137, 0	+145, 5	+145, 0	+145, 5
70	+132, 5	+134, 5	+131, 5	+143, 0	+141, 0	+143, 0
80	+130, 0	+131, 0	+125, 0	+140, 5	+137, 5	+140, 5
90	+123, 5	+124, 5	+124, 0	+138, 0	+135, 5	+139, 0
3.00	+120, 5	+119, 5	+117, 5	+132, 0	+130, 5	+132, 0
10	+115, 5	+113, 0	+108, 5	+122, 5	+125, 0	+125, 0
20	+107, 5	+109, 5	+106, 5	+118, 0	+118, 0	+122, 0
30	+103, 0	+101, 5	+ 99, 5	+111, 5	+110, 5	+112, 5
40	+ 88, 5	+ 88, 5	+ 86, 5	+104, 5	+104, 5	+105, 0
50	+ 83, 5	+ 83, 0	+ 72, 0	+ 95, 0	+ 94, 5	+ 99, 5
60	+ 73, 0	+ 68, 5	+ 49, 0	+ 86, 5	+ 87, 5	+ 90, 0
70	+ 57, 0	+ 56, 5	+ 43, 5	+ 72, 0	+ 73, 5	+ 72, 5
80	+ 43, 0	+ 37, 5	+ 38, 0	+ 71, 0	+ 65, 0	+ 63, 5
90	+ 30, 5	+ 32, 0	+ 22, 0	+ 55, 5	+ 53, 5	+ 54, 0
4.00	+ 17, 0	+ 18, 0	- 5, 5	+ 37, 5	+ 37, 5	+ 38, 0
10	+ 4, 0	- 7, 0	- 14, 0	+ 27, 0	+ 22, 5	+ 28, 5
20	- 16, 5	- 14, 0	- 20, 5	+ 6, 0	+ 6, 5	+ 8, 0
30	- 35, 5	- 27, 0	- 54, 0	- 4, 5	- 6, 5	- 5, 0
40	- 60, 0	- 52, 5	- 87, 5	- 29, 0	- 29, 0	- 28, 5
50	- 81, 5	- 80, 5	-113, 5	- 54, 5	- 51, 5	- 50, 5
60	- 88, 5	- 94, 0		- 82, 5	- 81, 0	- 80, 5
70	-115, 5	-114, 0				

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

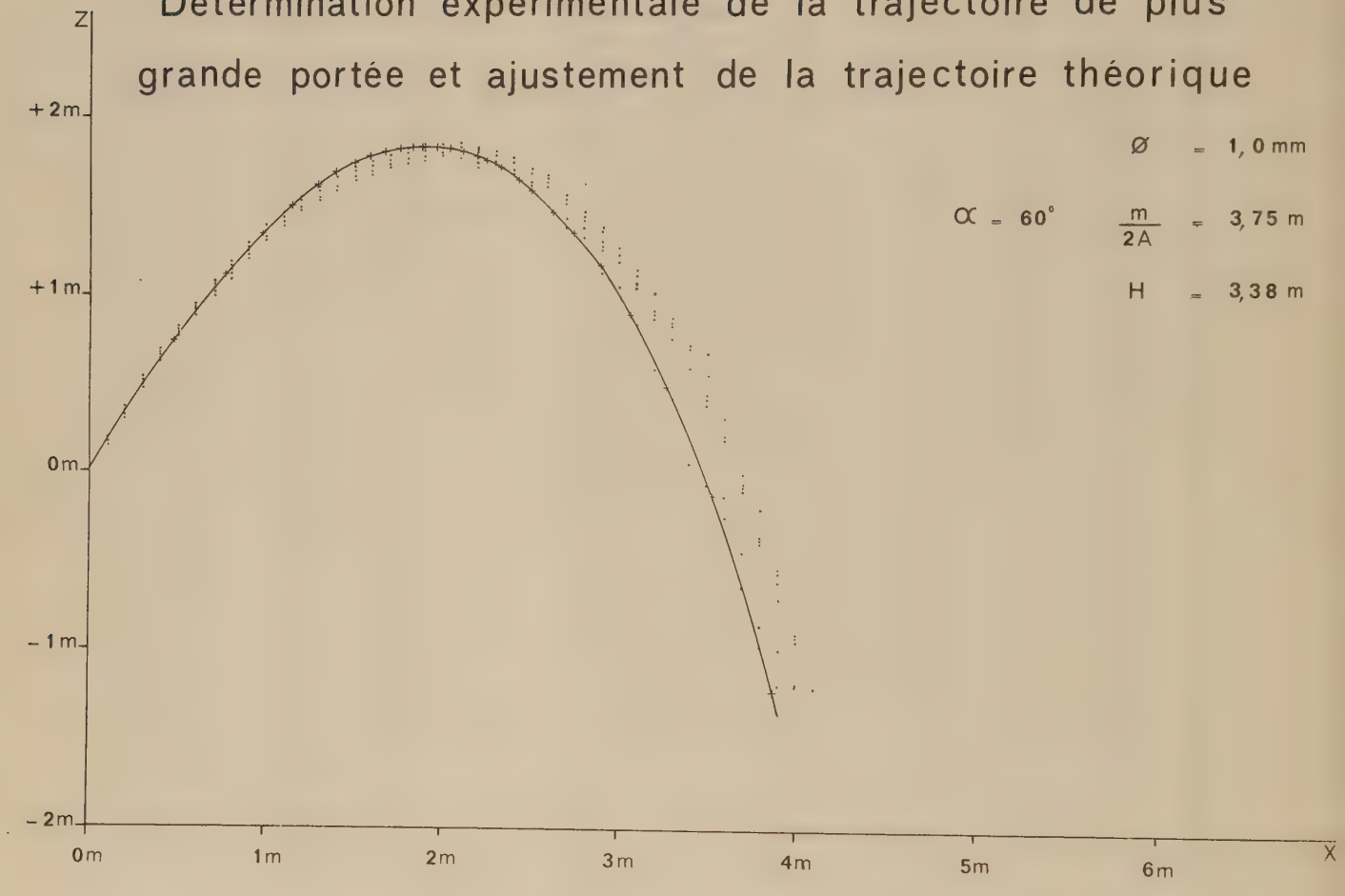
α = 50°

H = 3, 43 m C.E.

$\frac{m}{2A}$ = 3, 75 m

φ	X cm	Y cm
+ 45°	49, 1	+ 53, 8
+ 40°	84, 3	+ 85, 5
+ 35°	111, 5	+106, 5
+ 30°	133, 7	+120, 7
+ 25°	152, 5	+130, 5
+ 20°	169, 0	+137, 4
+ 15°	183, 8	+142, 0
+ 10°	197, 4	+145, 0
+ 5°	210, 0	+146, 7
0°	222, 1	+147, 2
- 5°	233, 9	+146, 7
- 10°	245, 4	+145, 2
- 15°	256, 9	+142, 7
- 20°	268, 6	+139, 0
- 25°	280, 7	+134, 0
- 30°	293, 3	+127, 4
- 35°	304, 7	+118, 8
- 40°	321, 2	+107, 7
- 45°	337, 1	+ 93, 1
- 50°	354, 9	+ 73, 6
- 55°	375, 1	+ 47, 2
- 60°	398, 6	+ 10, 1
- 65°	426, 4	- 43, 4
- 70°	459, 7	-124, 6

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 60°$

H = 3, 38 m C.E.

Ajutage Ø = 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 14, 5	+ 19, 5	+ 18, 5	+ 17, 0	+ 17, 0	+ 17, 0
20	+ 30, 0	+ 32, 0	+ 34, 5	+ 35, 0	+ 35, 0	+ 36, 5
30	+ 46, 5	+ 49, 0	+ 49, 0	+ 52, 0	+ 52, 5	+ 52, 0
40	+ 63, 0	+ 64, 0	+ 65, 0	+ 66, 5	+ 67, 0	+ 68, 5
50	+ 76, 5	+ 76, 5	+ 79, 0	+ 81, 0	+ 81, 5	+ 82, 0
60	+ 88, 0	+ 89, 0	+ 92, 5	+ 94, 0	+ 94, 5	+ 94, 5
70	+ 99, 5	+102, 0	+105, 0	+107, 0	+107, 5	+106, 5
80	+109, 5	+112, 5	+116, 5	+117, 5	+117, 5	+118, 5
90	+120, 0	+123, 0	+127, 5	+127, 5	+128, 5	+129, 5
1.00	+132, 0	+133, 0	+137, 0	+137, 5	+139, 5	+139, 0
10	+140, 0	+141, 0	+145, 5	+146, 5	+146, 0	+146, 0
20	+148, 5	+149, 0	+154, 5	+156, 0	+156, 0	+154, 5
30	+154, 0	+155, 0	+161, 0	+159, 5	+161, 0	+159, 5
40	+159, 5	+161, 5	+166, 5	+166, 0	+166, 5	+166, 0
50	+165, 0	+166, 0	+171, 5	+171, 5	+172, 0	+171, 5
60	+169, 5	+170, 5	+176, 0	+175, 0	+175, 0	+175, 5
70	+172, 0	+173, 0	+178, 0	+178, 5	+177, 5	+177, 5
80	+176, 0	+175, 5	+181, 5	+181, 5	+181, 5	+183, 0
90	+178, 0	+177, 5	+182, 5	+185, 0	+184, 0	+184, 0
2.00	+179, 0	+180, 5	+183, 5	+185, 5	+185, 5	+185, 5
10	+177, 0	+181, 0	+181, 5	+184, 5	+185, 0	+184, 5
20	+173, 0	+176, 0	+175, 0	+183, 5	+182, 5	+183, 5
30	+173, 0	+175, 0	+173, 0	+181, 5	+179, 5	+181, 5
40	+169, 0	+170, 5	+167, 5	+177, 0	+169, 5	+176, 0
50	+162, 0	+161, 5	+163, 0	+170, 0	+164, 5	+172, 0
60	+160, 0	+160, 5	+156, 5	+165, 0	+163, 0	+166, 0
70	+152, 0	+144, 5	+138, 5	+155, 0	+154, 5	+157, 0
80	+144, 5	+143, 0	+132, 5	+138, 0	+142, 5	+146, 5
90	+125, 5	+138, 0	+112, 0	+128, 0	+130, 0	+137, 0
3.00	+118, 5	+122, 7	+105, 0	+122, 5	+125, 5	+125, 0
10	+104, 5	+114, 0	+ 83, 0	+107, 0	+111, 0	+111, 0
20	+ 89, 5	+101, 0	+ 58, 5	+ 86, 0	+ 91, 0	+ 91, 0
30	+ 75, 0	+ 87, 0	+ 40, 5	+ 83, 5	+ 84, 5	+ 84, 5
40	+ 58, 5	+ 72, 0	+ 5, 0	+ 71, 5	+ 72, 0	+ 71, 5
50	+ 38, 0	+ 55, 0	- 7, 0	+ 67, 5	+ 44, 0	+ 42, 0
60	- 14, 0	+ 30, 0	- 25, 0	+ 19, 0	+ 20, 0	+ 19, 5
70	- 45, 0	- 1, 5	- 64, 5	- 10, 5	- 6, 5	- 6, 0
80	- 85, 5	- 20, 0	- 96, 5	- 39, 5	- 38, 5	- 36, 5
90	- 99, 5	- 71, 0	-118, 5	- 55, 0	- 61, 5	- 54, 5
4.00	-120, 5	-118, 5		- 94, 5	- 92, 0	- 91, 0
10				-120, 5	-120, 5	-120, 5

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

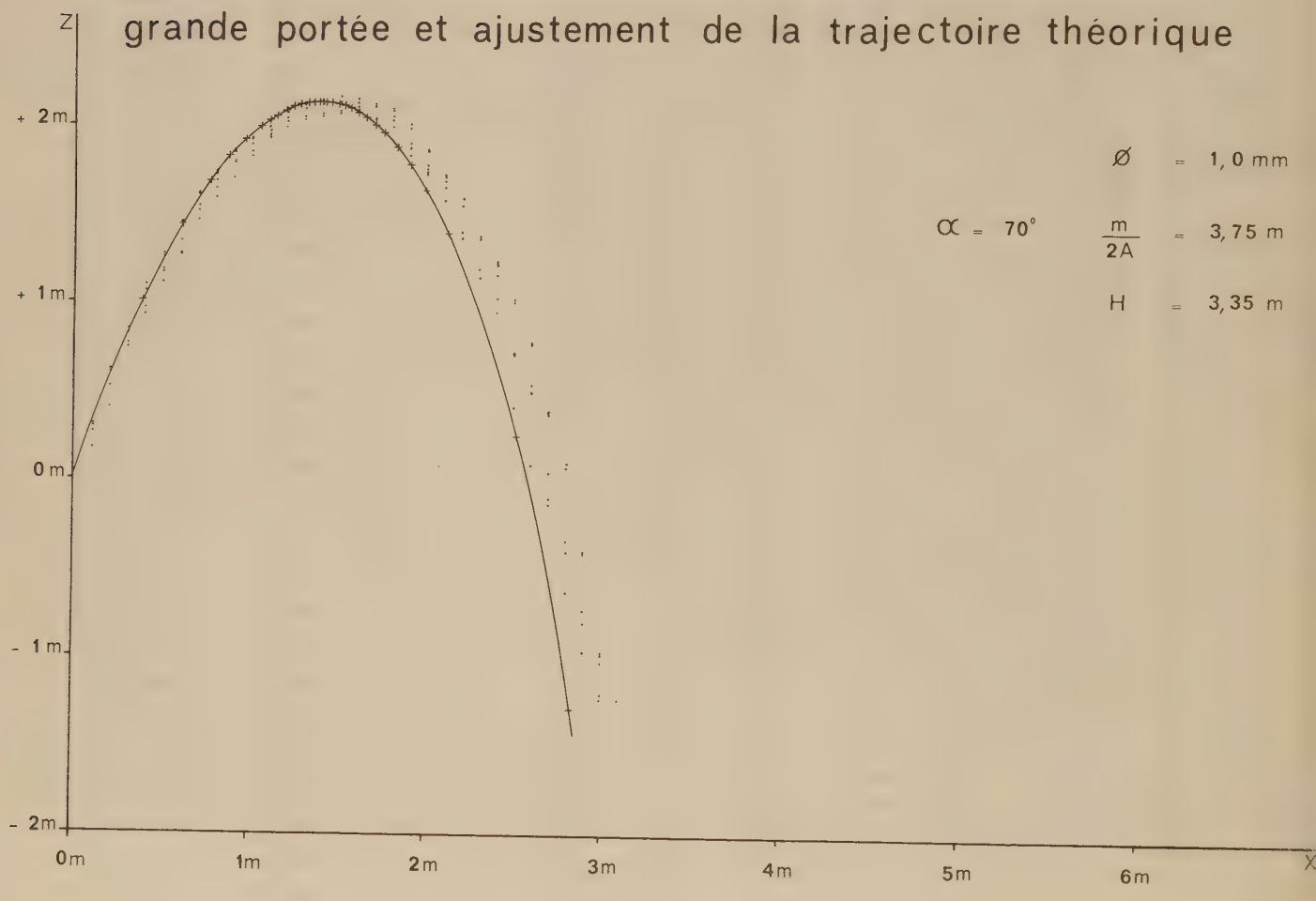
$\alpha = 60°$

H = 3, 38 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 3, 75$ m

φ	X cm	Y cm
+ 55°	45, 5	+ 72, 2
+ 50°	75, 3	+111, 2
+ 45°	96, 9	+135, 0
+ 40°	113, 8	+150, 6
+ 35°	127, 7	+161, 2
+ 30°	139, 4	+168, 7
+ 25°	149, 5	+174, 0
+ 20°	158, 7	+177, 8
+ 15°	167, 1	+180, 5
+ 10°	174, 9	+182, 2
+ 5°	182, 3	+183, 2
0°	189, 5	+183, 5
- 5°	196, 6	+183, 2
- 10°	203, 6	+182, 3
- 15°	210, 7	+180, 7
- 20°	218, 0	+178, 4
- 25°	225, 6	+175, 2
- 30°	233, 7	+171, 0
- 35°	242, 4	+165, 5
- 40°	251, 9	+158, 2
- 45°	262, 6	+148, 3
- 50°	274, 8	+135, 0
- 55°	289, 1	+116, 5
- 60°	306, 1	+ 89, 6
- 65°	326, 9	+ 49, 4
- 70°	353, 0	- 14, 2
- 75°	386, 7	-122, 1

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 70°

Ajutage : Ø = 1 mm

H = 3,35 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 17,0	+ 29,5	+ 26,0	+ 29,0	+ 29,5	+ 29,5
20	+ 40,0	+ 51,5	+ 61,0	+ 59,5	+ 60,0	+ 59,5
30	+ 73,5	+ 76,5	+ 76,0	+ 82,5	+ 84,0	+ 84,5
40	+ 92,5	+ 96,5	+ 96,5	+106,5	+106,5	+109,5
50	+110,5	+116,5	+118,0	+125,0	+126,0	+126,5
60	+127,0	+134,5	+126,5	+144,5	+144,5	+144,0
70	+146,0	+151,0	+154,0	+161,0	+161,0	+160,0
80	+158,5	+163,5	+167,5	+171,0	+172,0	+173,0
90	+169,5	+178,0	+179,0	+184,5	+184,0	+185,0
1.00	+181,0	+184,0	+188,0	+192,5	+191,5	+191,0
10	+192,0	+193,5	+196,5	+201,0	+200,5	+200,0
20	+198,0	+201,0	+203,0	+208,5	+206,0	+205,5
30	+202,5	+203,5	+208,0	+211,0	+210,5	+211,0
40	+204,5	+205,5	+211,0	+213,5	+214,0	+213,5
50	+206,0	+207,5	+212,5	+215,0	+215,0	+215,5
60	+207,5	+209,0	+209,0	+214,0	+213,5	+211,5
70	+203,0	+202,5	+203,0	+211,5	+211,0	+209,0
80	+201,5	+208,5	+198,0	+204,0	+207,0	+204,5
90	+189,5	+182,5	+186,5	+197,0	+199,5	+199,0
2.00	+173,0	+171,5	+174,5	+186,0	+185,5	+185,0
10	+164,0	+167,5	+157,0	+170,5	+171,5	+170,5
20	+139,0	+158,5	+135,5	+154,5	+154,0	+153,5
30	+118,5	+135,5	+113,0	+135,5	+134,0	+136,0
40	+115,0	+101,5	+ 94,5	+120,0	+122,0	+121,0
50	+ 71,5	+ 69,5	+ 40,5	+ 99,5	+101,0	+ 99,5
60	+ 48,5	+ 53,5	+ 8,0	+ 77,0	+ 77,0	+ 76,0
70	+ 3,5	- 11,0	- 14,5	+ 38,5	+ 37,5	+ 36,5
80	- 35,0	- 61,0	- 64,5	+ 6,5	+ 9,0	+ 6,0
90	- 74,0	- 81,0	- 97,5	- 41,5	- 40,5	- 41,0
3.00	-124,0	-121,0	-121,5	-104,0	- 99,0	- 98,5
10				-124,0	-124,0	-124,0

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

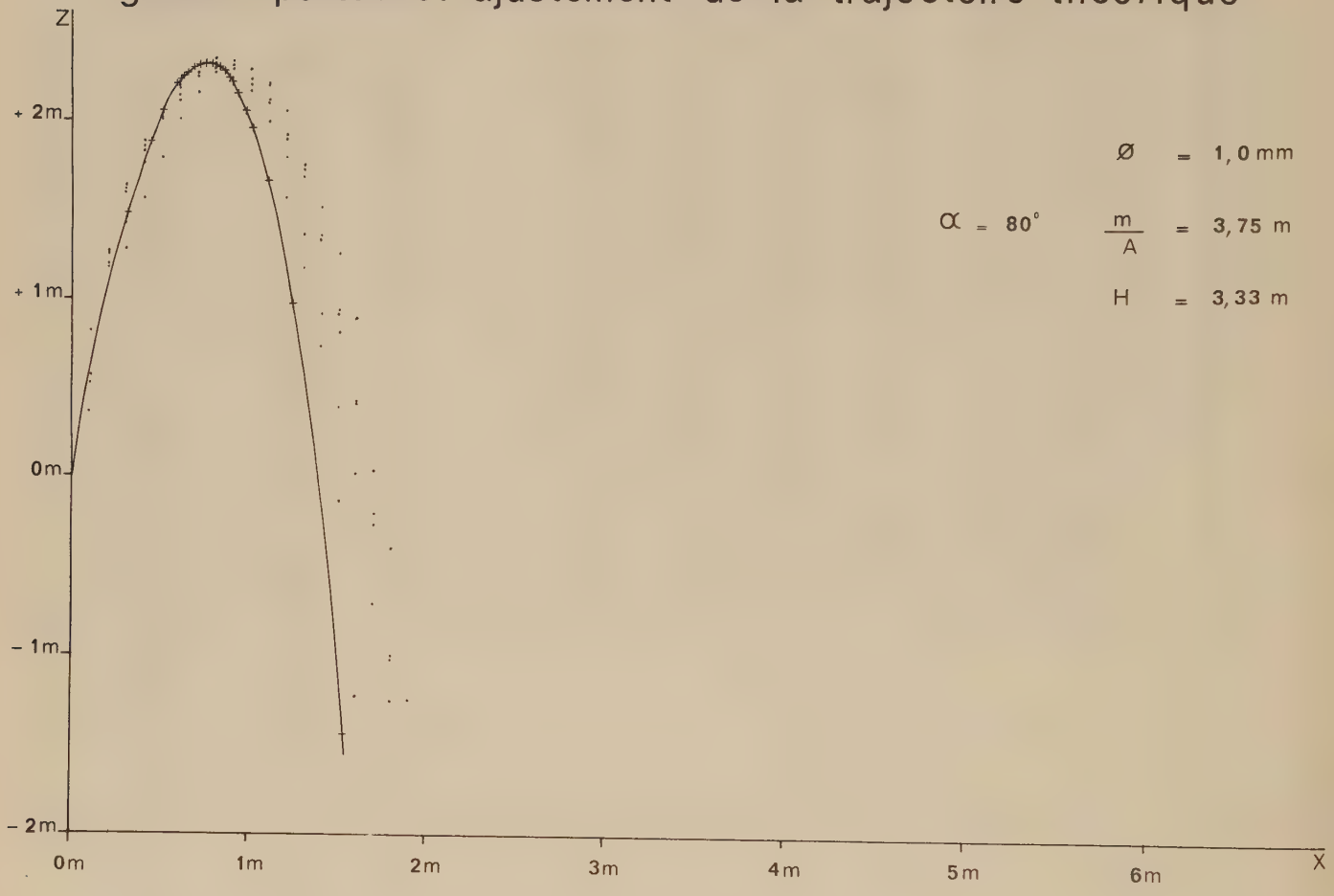
α = 70°

H = 3,35 m C.E.

$\frac{m}{2A}$ = 3,75 m

φ	X cm	Y cm
+ 65°	40,6	+ 99,8
+ 60°	63,2	+143,7
+ 55°	78,3	+167,6
+ 50°	89,3	+182,0
+ 45°	97,9	+191,4
+ 40°	104,8	+197,8
+ 35°	110,7	+202,4
+ 30°	115,9	+205,7
+ 25°	120,4	+208,0
+ 20°	124,6	+209,8
+ 15°	128,4	+211,0
+ 10°	132,1	+211,8
+ 5°	135,5	+212,2
0°	139,0	+212,4
- 5°	142,3	+212,2
- 10°	145,7	+211,8
- 15°	149,2	+211,0
- 20°	152,8	+209,9
- 25°	156,6	+208,3
- 30°	160,7	+206,2
- 35°	165,1	+203,3
- 40°	170,1	+199,5
- 45°	175,7	+194,4
- 50°	182,3	+187,2
- 55°	190,1	+176,9
- 60°	199,8	+161,6
- 65°	212,2	+137,6
- 70°	228,7	+ 97,4
- 75°	251,7	+ 24,1
- 80°	284,9	-129,5

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 80°

H = 3,33 m C.E.

Ajutage : Ø = 1 mm

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm	Y_4 cm	Y_5 cm	Y_6 cm
10	+ 36,5	+ 52,5	+ 57,0	+ 82,5	+ 82,0	+ 82,0
20	+ 84,0	+ 85,5	+ 97,5	+127,5	+127,5	+125,0
30	+128,5	+145,0	+142,5	+164,0	+161,0	+160,0
40	+158,5	+177,5	+183,5	+186,0	+188,0	+184,0
50	+178,5	+200,5	+201,5	+203,5	+202,5	+202,5
60	+201,5	+212,5	+214,5	+219,5	+216,5	+218,5
70	+215,5	+225,5	+225,0	+226,5	+226,5	+227,0
80	+227,0	+231,0	+230,0	+234,0	+231,5	+231,5
90	+229,5	+232,0	+229,0	+233,0	+232,5	+232,0
1.00	+228,5	+220,5	+216,0	+223,5	+223,5	+223,5
10	+221,0	+201,5	+192,5	+210,5	+211,5	+211,5
20	+205,0	+179,0	+157,0	+189,0	+192,5	+192,0
30	+175,5	+136,0	+117,5	+173,0	+173,0	+168,0
40	+151,0	+ 92,0	+ 73,5	+133,5	+135,0	+134,5
50	+125,5	+ 39,5	- 14,0	+ 81,0	+ 91,5	+ 93,0
60	+ 89,0	-123,5	-123,0	+ 2,0	+ 41,0	+ 42,0
70	+ 3,5			- 72,0	- 21,0	- 27,5
80	- 40,0			-126,0	-103,5	-101,5
90	-126,0				-126,0	-126,0

RESULTATS THEORIQUES

α = 80°

H = 3,33 m C.E.

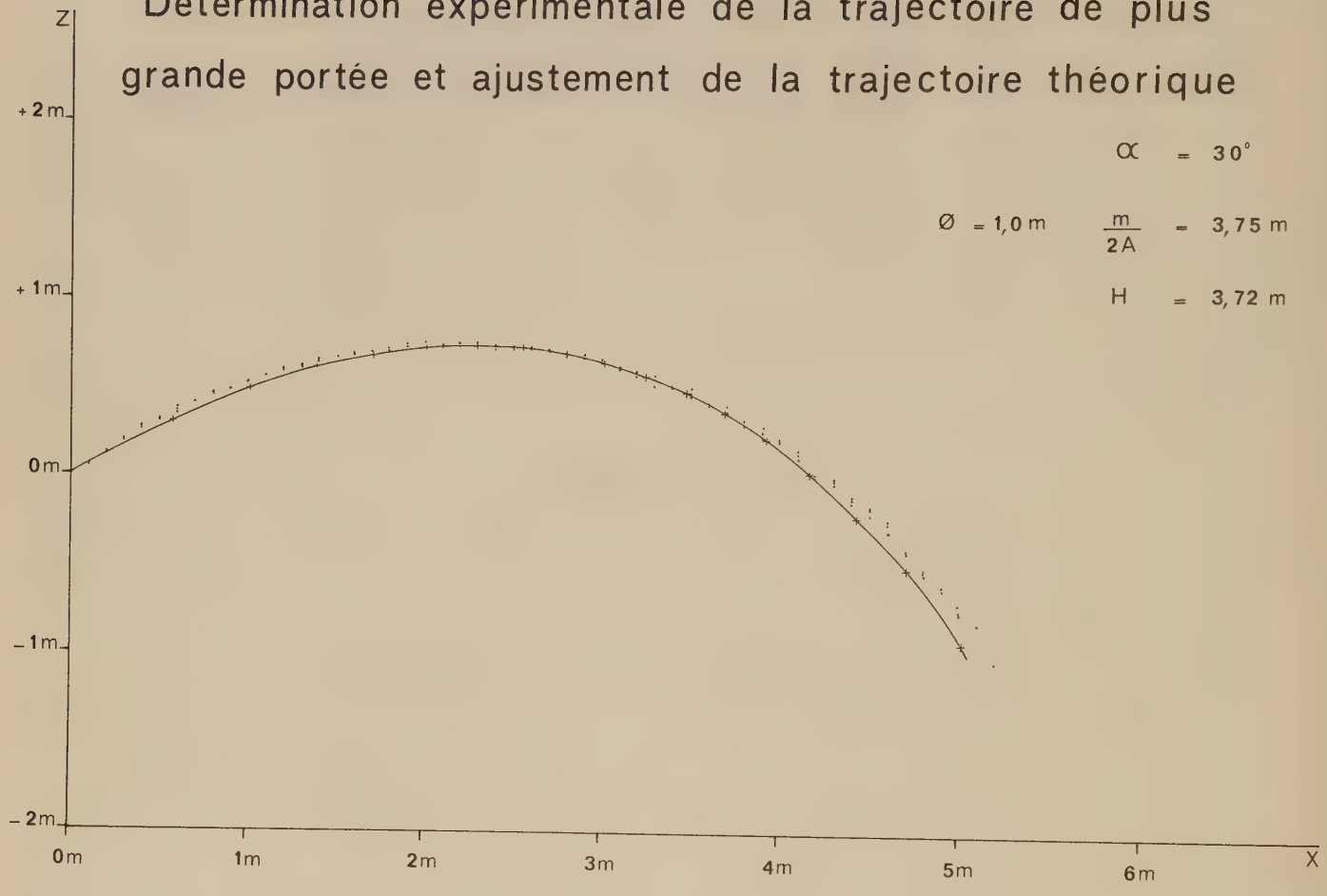
Ajutage : Ø 1 mm

$\frac{m}{2A}$ = 3,75 m

φ	X cm	Y cm
+ 75°	31,2	+148,5
+ 70°	43,7	+188,9
+ 65°	50,7	+206,1
+ 60°	55,3	+215,1
+ 55°	58,7	+220,3
+ 50°	61,2	+223,3
+ 45°	63,3	+225,9
+ 40°	65,0	+227,5
+ 35°	66,5	+228,6
+ 30°	67,7	+229,5
+ 25°	68,9	+230,1
+ 20°	70,0	+230,5
+ 15°	71,0	+230,8
+ 10°	71,9	+231,0
+ 5°	72,9	+231,2
0°	73,8	+231,7

φ	X cm	Y cm
- 5°	74,7	+231,2
- 10°	75,6	+231,0
- 15°	76,5	+230,8
- 20°	77,5	+230,5
- 25°	78,5	+230,1
- 30°	79,7	+229,5
- 35°	80,9	+228,7
- 40°	82,3	+227,6
- 45°	83,9	+226,1
- 50°	85,8	+224,0
- 55°	88,2	+221,0
- 60°	91,1	+216,3
- 65°	95,1	+206,6
- 70°	100,7	+194,9
- 75°	109,4	+166,9
- 80°	124,4	+ 97,1
- 85°	154,0	-145,9

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 30°$

Ajutage : Ø 1 mm

H = 3, 72 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm
10	+ 6, 5	+ 6, 0	+ 6, 5
20	+ 13, 5	+ 13, 5	+ 12, 5
30	+ 19, 5	+ 20, 0	+ 19, 5
40	+ 26, 0	+ 26, 0	+ 25, 5
50	+ 30, 5	+ 30, 5	+ 31, 0
60	+ 37, 0	+ 35, 5	+ 36, 0
70	+ 41, 5	+ 41, 5	+ 41, 5
80	+ 46, 0	+ 45, 0	+ 45, 5
90	+ 48, 0	+ 48, 0	+ 48, 5
1.00	+ 53, 0	+ 53, 5	+ 53, 0
10	+ 56, 0	+ 55, 5	+ 55, 5
20	+ 60, 5	+ 59, 0	+ 59, 0
30	+ 62, 5	+ 61, 0	+ 61, 5
40	+ 65, 0	+ 64, 0	+ 64, 5
50	+ 66, 5	+ 66, 5	+ 66, 5
60	+ 69, 0	+ 68, 0	+ 69, 0
70	+ 70, 5	+ 70, 0	+ 70, 0
80	+ 72, 0	+ 71, 5	+ 72, 0
90	+ 74, 0	+ 73, 5	+ 73, 0
2.00	+ 74, 5	+ 74, 5	+ 74, 0
10	+ 74, 0	+ 73, 5	+ 73, 5
20	+ 73, 5	+ 73, 5	+ 75, 0
30	+ 73, 5	+ 73, 5	+ 74, 5
40	+ 73, 0	+ 73, 0	+ 74, 0
50	+ 72, 5	+ 72, 5	+ 73, 0
60	+ 72, 0	+ 72, 0	+ 72, 5
70	+ 69, 5	+ 69, 5	+ 72, 0
80	+ 68, 0	+ 67, 5	+ 69, 5
90	+ 67, 0	+ 67, 0	+ 68, 0
3.00	+ 65, 5	+ 64, 0	+ 65, 5
10	+ 61, 5	+ 61, 0	+ 62, 0
20	+ 57, 5	+ 59, 0	+ 59, 5
30	+ 53, 0	+ 56, 0	+ 57, 0
40	+ 51, 5	+ 52, 0	+ 52, 0
50	+ 47, 0	+ 46, 5	+ 50, 0
60	+ 40, 5	+ 40, 0	+ 41, 0
70	+ 40, 0	+ 37, 0	+ 37, 0
80	+ 29, 0	+ 32, 0	+ 32, 0
90	+ 22, 0	+ 25, 5	+ 28, 0
4.00	+ 20, 0	+ 20, 0	+ 21, 0
10	+ 10, 0	+ 14, 0	+ 15, 0
20	+ 0, 0	+ 0, 5	+ 1, 5
30	- 1, 5	- 3, 0	- 1, 0
40	- 13, 5	- 11, 0	- 11, 5
50	- 20, 5	- 18, 0	- 17, 5
60	- 24, 5	- 26, 0	- 30, 5
70	- 41, 5	- 42, 0	- 42, 0
80	- 54, 5	- 52, 0	- 54, 0
90	- 60, 5	- 62, 5	- 60, 0
5.00	- 71, 0	- 75, 5	- 75, 5
10	- 82, 0	- 82, 0	- 82, 0
20	-103, 0	-103, 0	-103, 0

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1 mm

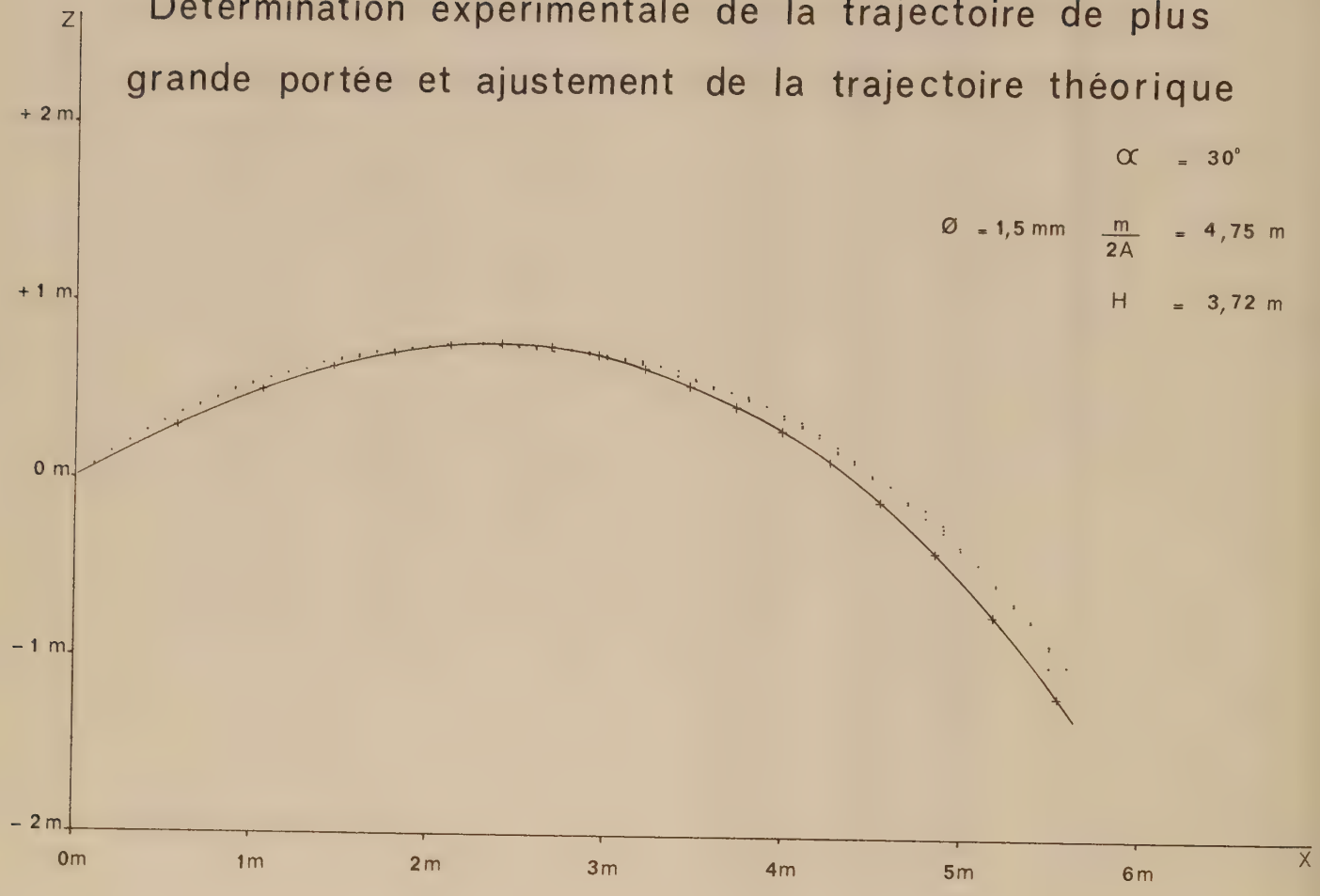
$\alpha = 30°$

H = 3, 72 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 3, 75$ m

φ	X cm	Y cm
+ 25°	56, 7	+ 29, 7
+ 20°	101, 8	+ 48, 4
+ 15°	139, 4	+ 60, 3
+ 10°	171, 9	+ 67, 6
+ 5°	200, 9	+ 71, 4
0°	230, 2	+ 72, 5
- 5°	255, 3	+ 71, 5
- 10°	278, 9	+ 68, 4
- 15°	301, 7	+ 63, 3
- 20°	324, 2	+ 56, 2
- 25°	346, 6	+ 46, 9
- 30°	369, 4	+ 35, 0
- 35°	392, 9	+ 20, 1
- 40°	417, 5	+ 1, 2
- 45°	443, 5	- 22, 6
- 50°	471, 5	- 53, 3
- 55°	502, 1	- 93, 3

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 30°

Ajutage : Ø 1, 5 mm

H = 3, 72 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm
10	+ 6, 5	+ 7, 0	+ 7, 0
20	+ 14, 0	+ 14, 0	+ 13, 5
30	+ 20, 0	+ 20,0	+ 20, 0
40	+ 25, 5	+ 26, 5	+ 26, 0
50	+ 31, 0	+ 31, 5	+ 31, 0
60	+ 36, 5	+ 36, 5	+ 36, 5
70	+ 40, 5	+ 41, 5	+ 40, 5
80	+ 45, 5	+ 45, 0	+ 44, 0
90	+ 49, 5	+ 49, 5	+ 49, 0
1.00	+ 53, 5	+ 52, 5	+ 52, 0
10	+ 56, 0	+ 55, 5	+ 56, 0
20	+ 59, 5	+ 59, 0	+ 59, 0
30	+ 61, 5	+ 61, 5	+ 62, 0
40	+ 65, 5	+ 64, 5	+ 64, 5
50	+ 67, 5	+ 66, 5	+ 66, 5
60	+ 69, 0	+ 68, 5	+ 67, 5
70	+ 71, 0	+ 69, 5	+ 70, 0
80	+ 72, 0	+ 72, 0	+ 71, 0
90	+ 73, 0	+ 72, 5	+ 72, 0
2.00	+ 74, 0	+ 73, 5	+ 73, 5
10	+ 75, 0	+ 74, 5	+ 74, 5
20	+ 76, 0	+ 76, 0	+ 75, 5
30	+ 76, 5	+ 75, 5	+ 76, 5
40	+ 75, 5	+ 75, 5	+ 75, 0
50	+ 75, 0	+ 75, 0	+ 74, 0
60	+ 74, 5	+ 74, 5	+ 73, 0
70	+ 74, 0	+ 73, 5	+ 72, 5
80	+ 73, 0	+ 73, 0	+ 72, 5
90	+ 72, 0	+ 71, 5	+ 70, 5
3.00	+ 70, 0	+ 69, 5	+ 67, 5
10	+ 68, 5	+ 68, 5	+ 67, 0
20	+ 67, 0	+ 66, 0	+ 65, 0
30	+ 64, 5	+ 64, 0	+ 64, 0
40	+ 61, 0	+ 59, 5	+ 59, 0
50	+ 57, 0	+ 56, 0	+ 56, 0
60	+ 53, 0	+ 51, 5	+ 52, 0
70	+ 50, 0	+ 50, 0	+ 50, 5
80	+ 47, 0	+ 45, 5	+ 46, 0
90	+ 41, 5	+ 41, 5	+ 41, 5
4.00	+ 37, 0	+ 35, 5	+ 37, 0
10	+ 33, 0	+ 30, 0	+ 31, 0
20	+ 25, 0	+ 26, 5	+ 25, 0
30	+ 19, 5	+ 16, 5	+ 17, 5
40	+ 12, 5	+ 10, 5	+ 11, 0
50	+ 3, 5	+ 2, 5	+ 3, 0
60	- 2, 5	- 2, 5	- 2, 5
70	- 12, 5	- 10, 5	- 11, 0
80	- 15, 5	- 19, 5	- 20, 0
90	- 24, 0	- 28, 5	- 26, 0
5.00	- 37, 5	- 37, 5	- 36, 0
10	- 46, 5	- 46, 5	- 46, 0
20	- 58, 5	- 58, 5	- 57, 5
30	- 69, 0	- 67, 5	- 67, 5
40	- 78, 0	- 76, 5	- 77, 0
50	-103, 0	- 91, 5	- 93, 0
60		-103, 0	-103, 0

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 1, 5 mm

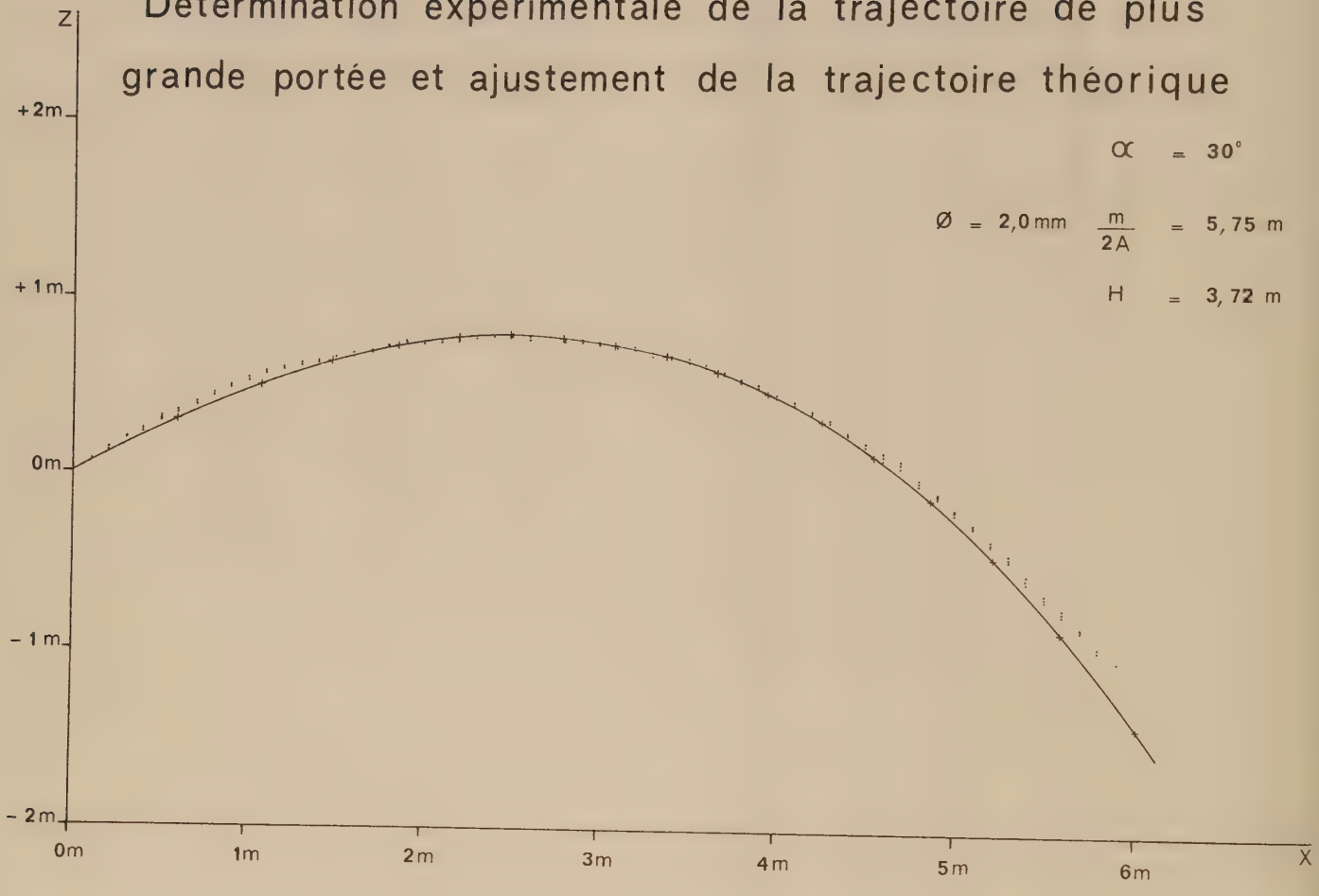
α = 30°

H = 3, 72 m C.E.

$\frac{m}{2A}$ = 4, 75 m

φ	X cm	Y cm
+ 25°	57, 7	+ 30, 1
+ 20°	105, 0	+ 49, 7
+ 15°	145, 1	+ 62, 4
+ 10°	180, 3	+ 70, 3
+ 5°	212, 5	+ 74, 5
0°	241, 5	+ 75, 8
- 5°	269, 2	+ 74, 6
- 10°	295, 7	+ 71, 1
- 15°	321, 5	+ 61, 9
- 20°	347, 2	+ 53, 8
- 25°	372, 9	+ 43, 1
- 30°	399, 2	+ 29, 4
- 35°	426, 5	+ 12, 0
- 40°	455, 5	- 10, 2
- 45°	485, 8	- 38, 1
- 50°	519, 0	- 74, 4
- 55°	555, 5	-122, 0

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

$\alpha = 30°$

Ajutage : Ø 2 mm

H = 3, 72 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm
10	+ 7, 5	+ 7, 5	+ 7, 5
20	+ 13, 5	+ 13, 5	+ 14, 0
30	+ 20, 5	+ 20, 0	+ 20, 0
40	+ 23, 5	+ 24, 0	+ 24, 0
50	+ 29, 5	+ 31, 5	+ 31, 0
60	+ 34, 5	+ 34, 0	+ 35, 5
70	+ 39, 0	+ 38, 5	+ 40, 0
80	+ 45, 0	+ 45, 0	+ 44, 5
90	+ 49, 0	+ 48, 5	+ 48, 0
1.00	+ 53, 0	+ 53, 0	+ 54, 0
10	+ 57, 0	+ 57, 0	+ 56, 5
20	+ 60, 0	+ 58, 5	+ 59, 0
30	+ 61, 0	+ 62, 0	+ 62, 0
40	+ 63, 0	+ 62, 5	+ 63, 5
50	+ 65, 5	+ 64, 0	+ 66, 0
60	+ 68, 0	+ 68, 5	+ 67, 5
70	+ 70, 0	+ 69, 0	+ 69, 5
80	+ 73, 0	+ 72, 5	+ 73, 0
90	+ 75, 0	+ 74, 0	+ 74, 0
2.00	+ 75, 5	+ 75, 0	+ 74, 5
10	+ 76, 0	+ 76, 0	+ 75, 0
20	+ 76, 5	+ 76, 5	+ 75, 5
30	+ 77, 0	+ 77, 0	+ 76, 0
40	+ 77, 5	+ 77, 5	+ 77, 5
50	+ 78, 0	+ 77, 0	+ 78, 0
60	+ 76, 0	+ 77, 5	+ 78, 0
70	+ 76, 0	+ 77, 0	+ 77, 0
80	+ 75, 5	+ 77, 0	+ 76, 0
90	+ 75, 0	+ 76, 0	+ 75, 5
3.00	+ 74, 5	+ 75, 0	+ 74, 0
10	+ 72, 0	+ 73, 0	+ 72, 5
20	+ 70, 5	+ 72, 0	+ 71, 0
30	+ 67, 5	+ 69, 0	+ 68, 5
40	+ 66, 0	+ 67, 0	+ 67, 0
50	+ 63, 5	+ 65, 0	+ 64, 5
60	+ 61, 0	+ 62, 5	+ 61, 0
70	+ 58, 0	+ 58, 5	+ 57, 0
80	+ 54, 0	+ 53, 5	+ 54, 0
90	+ 50, 0	+ 51, 0	+ 50, 0
4.00	+ 44, 0	+ 45, 0	+ 45, 0
10	+ 40, 0	+ 41, 0	+ 41, 5
20	+ 36, 5	+ 36, 0	+ 35, 0
30	+ 30, 0	+ 31, 0	+ 32, 0
40	+ 23, 0	+ 24, 5	+ 25, 0
50	+ 17, 5	+ 18, 0	+ 19, 0
60	+ 9, 0	+ 13, 0	+ 12, 0
70	+ 8, 0	+ 5, 5	+ 7, 0
80	- 2, 0	- 4, 5	- 3, 0
90	- 10, 0	- 12, 0	- 9, 5
5.00	- 18, 5	- 19, 0	- 22, 0
10	- 26, 5	- 28, 0	- 27, 0
20	- 36, 0	- 37, 5	- 35, 0
30	- 44, 0	- 45, 0	- 46, 5
40	- 59, 5	- 57, 5	- 55, 0
50	- 67, 0	- 65, 0	- 68, 5
60	- 75, 0	- 74, 5	- 76, 0
70	- 86, 5	- 84, 0	- 85, 0
80	- 96, 5	- 96, 0	- 97, 0
85	-103, 0	-103, 0	-103, 0

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 2 mm

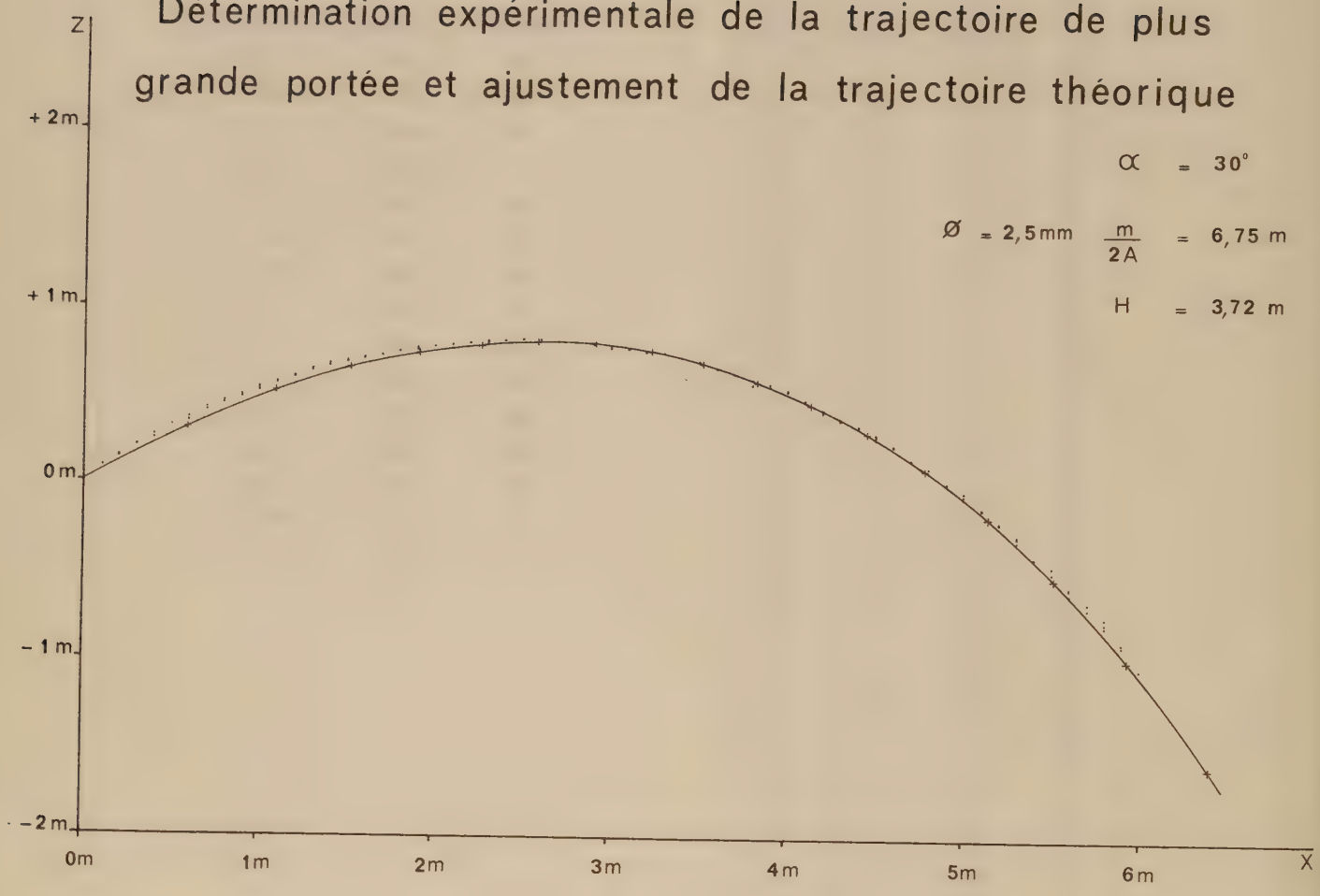
$\alpha = 30°$

H = 3, 72 m C.E.

$\frac{m}{2A} = 5, 75$ m

φ	X cm	Y cm
+ 25°	+ 58, 4	+ 30, 5
+ 20°	+106, 9	+ 50, 7
+ 15°	+148, 8	+ 64, 0
+ 10°	+186, 1	+ 72, 2
+ 5°	+220, 0	+ 76, 7
0°	+251, 5	+ 78, 1
- 5°	+281, 3	+ 76, 8
- 10°	+310, 3	+ 73, 0
- 15°	+338, 6	+ 66, 8
- 20°	+366, 7	+ 57, 9
- 25°	+395, 2	+ 46, 1
- 30°	+424, 4	+ 30, 8
- 35°	+454, 9	+ 11, 4
- 40°	+487, 2	- 13, 3
- 45°	+521, 7	+ 45, 1
- 50°	+559, 4	- 86, 3
- 55°	+601, 2	-140, 9

Détermination expérimentale de la trajectoire de plus grande portée et ajustement de la trajectoire théorique



RESULTATS EXPERIMENTAUX

α = 30°

Ajutage : Ø 2, 5mm

H = 3, 72 m C.E.

X cm	Y_1 cm	Y_2 cm	Y_3 cm
10	+ 7, 5	+ 8, 0	+ 8, 0
20	+ 14, 0	+ 13, 0	+ 13, 0
30	+ 20, 5	+ 20, 0	+ 20, 0
40	+ 24, 0	+ 24, 5	+ 26, 0
50	+ 31, 5	+ 31, 5	+ 31, 5
60	+ 36, 0	+ 34, 5	+ 35, 0
70	+ 40, 5	+ 41, 5	+ 42, 0
80	+ 45, 5	+ 44, 5	+ 44, 5
90	+ 47, 5	+ 48, 5	+ 49, 0
1.00	+ 52, 5	+ 53, 5	+ 54, 0
10	+ 56, 0	+ 57, 0	+ 56, 5
20	+ 60, 0	+ 59, 5	+ 60, 5
30	+ 63, 5	+ 63, 5	+ 64, 0
40	+ 66, 0	+ 67, 0	+ 66, 5
50	+ 69, 0	+ 68, 5	+ 68, 0
60	+ 70, 5	+ 71, 0	+ 70, 5
70	+ 72, 0	+ 72, 0	+ 72, 5
80	+ 74, 0	+ 74, 0	+ 74, 5
90	+ 75, 5	+ 76, 0	+ 76, 5
2.00	+ 77, 0	+ 77, 0	+ 77, 5
10	+ 78, 0	+ 78, 0	+ 78, 0
20	+ 79, 0	+ 79, 0	+ 78, 5
30	+ 79, 5	+ 79, 5	+ 80, 0
40	+ 80, 5	+ 80, 5	+ 80, 5
50	+ 81, 0	+ 81, 0	+ 81, 0
60	+ 80, 0	+ 81, 0	+ 80, 0
70	+ 80, 0	+ 80, 0	+ 79, 5
80	+ 79, 5	+ 79, 5	+ 79, 5
90	+ 78, 5	+ 78, 5	+ 79, 0
3.00	+ 76, 5	+ 77, 0	+ 77, 5
10	+ 76, 0	+ 75, 5	+ 76, 0
20	+ 74, 5	+ 74, 5	+ 74, 5
30	+ 73, 5	+ 73, 5	+ 73, 5
40	+ 71, 0	+ 70, 5	+ 71, 0
50	+ 68, 0	+ 69, 0	+ 68, 5
60	+ 65, 5	+ 65, 0	+ 65, 0
70	+ 62, 0	+ 62, 0	+ 61, 5
80	+ 59, 0	+ 55, 5	+ 56, 5
90	+ 56, 5	+ 54, 5	+ 55, 0
4.00	+ 52, 5	+ 52, 5	+ 53, 0
10	+ 47, 0	+ 47, 5	+ 47, 0
20	+ 41, 0	+ 40, 0	+ 42, 5
30	+ 37, 5	+ 36, 5	+ 36, 5
40	+ 32, 0	+ 33, 0	+ 33, 0
50	+ 28, 5	+ 25, 5	+ 27, 5
60	+ 22, 5	+ 22, 5	+ 21, 5
70	+ 14, 5	+ 13, 5	+ 14, 0
80	+ 9, 5	+ 7, 0	+ 9, 0
90	+ 1, 0	+ 0, 5	+ 1, 5
5.00	- 6, 5	- 7, 5	- 4, 5
10	- 13, 0	- 13, 5	- 13, 5
20	- 21, 5	- 22, 0	- 21, 0
30	- 28, 5	- 32, 5	- 29, 5
40	- 41, 0	- 41, 0	- 41, 0
50	- 46, 0	- 49, 5	- 45, 5
60	- 58, 5	- 61, 5	- 57, 5
70	- 66, 0	- 69, 5	- 65, 5
80	- 74, 5	- 79, 5	- 77, 5
90	- 90, 5	- 88, 5	- 88, 5
6.00	-103, 5	-103, 5	-103, 5

RESULTATS THEORIQUES

Ajutage : Ø 2, 5mm

α = 30°

H = 3, 72 m C. E.

$\frac{m}{2A}$ = 6, 75 m

φ	X cm	Y cm
+ 25°	58, 8	+ 30, 7
+ 20°	108, 5	+ 51, 4
+ 15°	151, 8	+ 65, 1
+ 10°	190, 5	+ 73, 7
+ 5°	226, 1	+ 78, 4
0°	259, 4	+ 79, 9
- 5°	291, 1	+ 78, 5
- 10°	321, 8	+ 74, 4
- 15°	352, 1	+ 67, 7
- 20°	382, 4	+ 58, 2
- 25°	413, 2	+ 45, 4
- 30°	444, 9	+ 28, 9
- 35°	478, 1	+ 7, 7
- 40°	513, 4	- 19, 3
- 45°	551, 4	- 54, 3
- 50°	593, 1	- 99, 9
- 55°	639, 5	-160, 6

TROISIEME PARTIE

ETUDE DE LA GRANULOMETRIE DES ASPERSEURS

CHAPITRE I

SCHEMA PROBABILISTE LIE A LA GRANULOMETRIE

1. LOI DE PROBABILITE ELEMENTAIRE DE LA DUREE SEPARANT DEUX EVENEMENTS CONSECUTIFS

L'asperseur fixe projette des gouttes sur une surface S. Considérons un élément dS de cette surface et observons l'arrivée successive des gouttes sur cet élément, sans nous occuper des dimensions diverses que peuvent présenter les gouttes arrivant sur dS.

L'évènement E auquel nous nous intéressons dans ce chapitre est l'arrivée d'une goutte.

Un évènement E vient de se produire. Nous déclenchons un chronomètre et nous observons qu'il n'arrive pas de gouttes pendant la période de temps t qui a suivi le déclenchement du chronomètre. Cherchons, dans ces conditions, quelle est la probabilité pour qu'un évènement E ne se produise pas pendant la durée dt qui suit le temps t.

En supposant que les évènements sont indépendants les uns des autres, nous pouvons dire que la probabilité d'apparition d'un nouvel évènement durant la durée de temps dt qui suit le temps t est égale à la probabilité de la non apparition d'un nouvel évènement pendant cette même durée dt.

Dans ces conditions, la probabilité d'apparition d'un évènement dans la durée dt qui suit le temps t ne peut être que proportionnelle à la durée dt soit :

$$(1) \qquad c \; dt$$

en désigant par c une constante positive.

Désignons par F (t) la fonction de répartition de la non apparition d'un nouvel évènement dont la signification probabiliste est donnée par l'une des deux relations suivantes :

$$\text{Prob.}\ (t < T < t + dt) = d\,F(t) \quad \text{avec } T \geqslant t$$

et $\qquad \text{Prob.}\ (T < t) = F(t)$

ou $\qquad \text{Prob.}\ (T > t) = 1 - F(t)$

La probabilité de la non apparition d'un évènement est une probabilité conditionnelle puisque nous avons supposé que pendant la durée t qui a suivi la réalisation de l'évènement E aucun nouvel évènement ne s'est produit.

En utilisant le théorème des probabilités conditionnelles, la probabilité de non apparition d'un évènement pendant la durée dt qui suit le temps t s'écrit :

$$(2)\ \frac{d\ F\ (t)}{1\ -\ F(t)}$$

Les évènements étant supposés indépendants, nous pouvons égaler les expressions (1) et (2). Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$(3)\ \frac{d\ F\ \ (t)}{1\ -\ F\ (t)} = c\ dt$$

En remarquant que :

$$d\left[1\ -\ F\ (t)\right]\ =\ -\ d\ F\ (t)$$

l'équation différentielle à variables séparables (3) s'intègre immédiatement. Il vient :

$$1\ -\ F\ (t)\ =\ k\ e^{-ct}$$

Les conditions à l'origine imposent pour t = o F (t) = o ce qui détermine la valeur de la constante d'intégration k = 1.

Par suite :

$$(4)\ F\ (t)\ =\ 1\ -\ e^{-ct}$$

La probabilité de la non apparition d'un évènement est aussi la probabilité de la durée qui sépare deux évènements successifs.

La loi de probabilité élémentaire des durées séparant deux évènements successifs s'obtient en différentiant l'expression (4)

$$(5)\ d\ F\ (t)\ =\ f\ (t)\ dt\ =\ c\ e^{-ct}\quad dt \text{ soit}$$

$$f\ (t)\ =\ c\ e^{-ct}$$

De l'expression (5), nous déduisons la durée moyenne séparant deux évènements successifs :

$$E\ (t)\ =\int_0^{\infty} tc\ \ e^{-ct}\quad dt\ =\frac{1}{c}$$

Dire que la durée moyenne séparant deux évènements consécutifs est $\frac{1}{c}$ revient à dire qu'en moyenne il se produit c évènements par unité de temps.

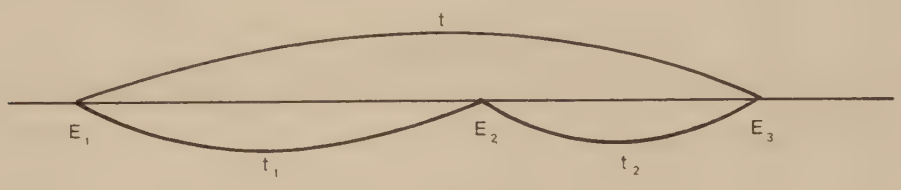
La densité moyenne des évènements est donc égale à c.

2. LOI DE PROBABILITE ELEMENTAIRE DE LA DUREE SEPARANT n + 2 EVENEMENTS CONSECUTIFS

Nous avons démontré que la loi de probabilité élémentaire qui sépare deux évènements consécutifs E_1 et E_2 s'écrit :

$$f_o(t) = c\ e^{-ct} = c\ \frac{(ct)^o}{o\ !} e^{-ct}$$

Cherchons la probabilité élémentaire de la durée qui sépare trois évènements. Nous raisonnerons sur le schéma suivant :



Les deux variables aléatoires t_1 et t_2 sont telles que

$$t = t_1 + t_2$$

t étant la durée qui sépare l'évènement E_1 et E_3

Puisque t_1 et t_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, elles suivent respectivement des lois de probabilité du type $f_o(t)$.

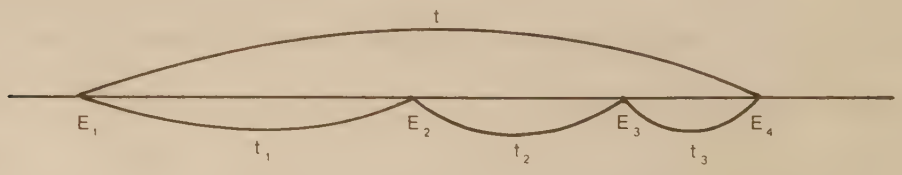
Les distributions étant continues, le théorème relatif à l'addition des variables aléatoires permet d'écrire

$$f_1(t)\,dt = \left[\int_{u=o}^{u=t} c\ e^{-cu} \times c\ e^{-c(t-u)}\ du \right] dt$$

Il vient :

$$f_1(t) = c^2\ t\ e^{-ct} = c\ \left(\frac{ct}{1\ !}\right)^1 e^{-ct}$$

Pour assurer notre raisonnement récurrentiel, cherchons la loi de probabilité élémentaire de la durée qui sépare quatre évènements et désignons cette loi par $f_2(t)$.



Utilisons le théorème concernant l'addition des variables aléatoires en tenant compte de la loi $f_1(t)$ trouvée précédemment. Il vient

$$f_2(t)\,dt = \left[\int_{u=o}^{u=t} c^2\, u\, e^{-cu} \times c\, e^{-c(t-u)}\, du\right] dt$$

$$f_2(t) = c \cdot \frac{(ct)^2}{2!}\, e^{-ct}$$

Admettons que la loi de probabilité élémentaire de la durée qui sépare n + 1 évènements est :

$$f_{(n-1)}(t) = c\, \frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-ct}$$

La loi de probabilité élémentaire séparant n + 2 évènements est

$$f_n(t)\,dt = \left[\int_{u=o}^{u=t} c \cdot \frac{(ct)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-ct} \times c\, e^{-c(t-u)}\, du\right] dt$$

soit

$$f_n(t) = c \cdot \frac{(ct)^n}{n!}\, e^{-ct}$$

Si dans une période T il se produit un certain nombre d'évènements, la probabilité de voir arriver exactement n évènements est

$$Pn = \frac{(cT)^n}{n!}\, e^{-cT}$$

L'arrivée des gouttes sur un élément de surface dS est donc régie théoriquement par une loi de POISSON.

3. SECONDE DEMONSTRATION

L'étude suivante va nous permettre d'établir une seconde démonstration plus immédiate.

Désignons par c le nombre de gouttes susceptibles de parvenir sur l'élément de surface dS pendant l'unité de temps. Dans ces conditions, la probabilité de voir arriver une goutte pendant le temps dt est

$$p = c\,dt$$

La probabilité de ne pas assister à l'arrivée d'une goutte pendant le temps dt est la probabilité contraire q telle que

$$q = 1 - c\,dt$$

Considérons maintenant une durée telle que

$$t = \lambda \, dt$$

La probabilité de ne pas assister à l'arrivée de gouttes pendant le temps t sera obtenue en appliquant le théorème des probabilités composées puisque les évènements sont supposés indépendants les uns des autres.

$$Po = (1 - c \, dt)^{\lambda}$$

soit

$$Po = (1 - c \, dt)^{\frac{t}{dt}}$$

Prenons le logarithme de cette dernière expression

$$\log_e Po = \frac{t}{dt} \log_e (1 - c \, dt)$$

Comme c dt est un infiniment petit du premier ordre, nous pouvons écrire

$$\log_e (1 - cdt) \simeq - cdt$$

Par suite

$$Po = e^{-ct}$$

Cherchons maintenant la probabilité d'assister à l'arriver d' une goutte et d'une seule pendant le temps t. Nous pouvons fragmenter la durée t en trois intervalles

. de 0 à t_1 à dt_1 près où il n'arrive pas de goutte

dt_1 où il arrive une goutte

de t_1 à t où il n'arrive pas de goutte.

La probabilité d'assister à l'arrivée d'une goutte pendant le temps t est donc

$$P_1 = \int_o^t e^{-ct_1} \times c \, dt_1 \, e^{-c \, (t-t_1)} \quad \text{soit}$$

$$P_1 = c \, t \, e^{-ct}$$

La probabilité de voir survenir deux gouttes sera

$$P_2 = \int_o^t (ct_1 \, e - {}^{ct_1}) \quad cdt_1 \times e^{-c \, (t-t_1)} \quad \text{soit}$$

$$P_2 = \frac{(ct)^2}{2!} \, e^{-ct}$$

Un raisonnement récurrentiel nous montrerait que la probabilité d'assister à l'arrivée de n gouttes pendant le temps t est

$$Pn = \frac{(ct)^n}{n!} e^{-ct}$$

Nous retrouvons la même loi que tout à l'heure.

Précédemment nous avions déterminé la loi de probabilité des durées séparant plusieurs évènements et nous en avons déduit la loi de probabilité de l'arrivée d'un nombre déterminé de gouttes pendant une certaine durée.

Dans la seconde démonstration, nous avons raisonné à partir de l'évènement lui-même.

CHAPITRE II

DETERMINATION EXPERIMENTALE DU DIAMETRE MOYEN DES GOUTTES TOMBEES A UNE DISTANCE DONNEE DE L'AJUTAGE

Dans ce chapitre, nous allons exposer les deux méthodes que nous avons employées pour déterminer le diamètre moyen des gouttes tombées à une distance donnée de la buse de l'asperseur.

Toutes les expériences qui vont suivre ont été réalisées dans les conditions suivantes :

- angle de tir de l'asperseur : $\alpha = 30°$
- pression au niveau de l'ajutage : H = 3,72 m de colonne d'eau.

1. METHODE PHOTOGRAPHIQUE - CHOIX DU MILIEU RECEPTEUR

Le principe de cette méthode consiste à recevoir les gouttes émises par l'asperseur dans un milieu transparent, coloré, non miscible à l'eau, et tel que la vitesse de chûte des gouttes à l'intérieur de ce milieu soit suffisamment faible pour que des photographies puissent être prises dans de bonnes conditions.

Le premier problème à résoudre fut le choix du milieu récepteur correspondant aux conditions ci-dessus.

Après de nombreux essais, il s'est avéré, compte tenu de certains impératifs qui seront mentionnés ensuite, que le meilleur milieu récepteur, pour la gamme de nos expériences, était une huile du type ASE 80 ou 90 dont la viscosité cinématique est de l'ordre de 1, 2 à 1, 3 stockes.

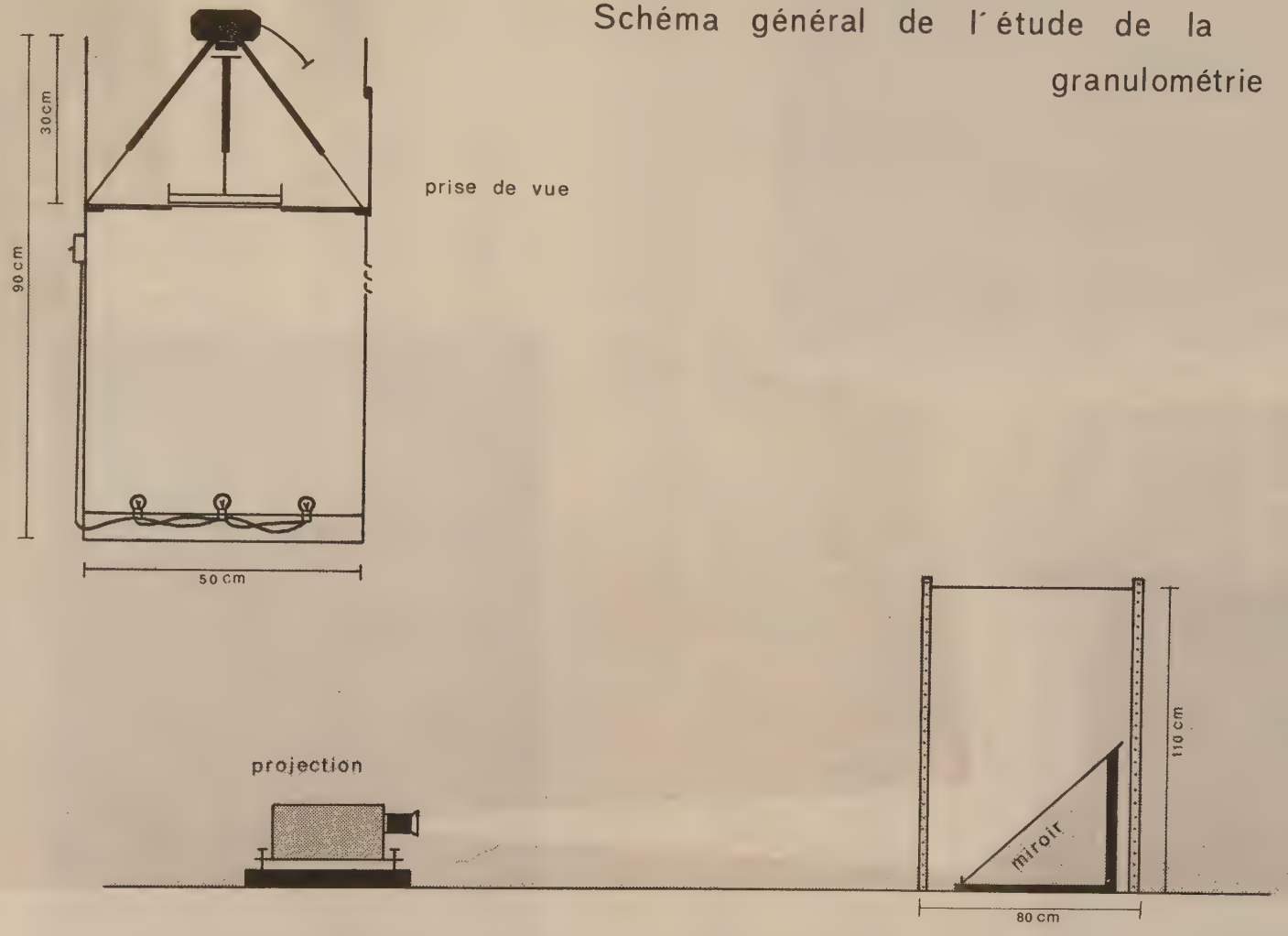
Les avantages de cette huile sont les suivants :

- milieu non miscible à l'eau,
- milieu coloré permettant un fort contraste avec les gouttes,
- milieu suffisamment visqueux pour que les gouttes qui s'y trouvent tombent à une vitesse très faible, (*cette dernière caractéristique présente corrélativement l'avantage de n'utiliser l'huile que sous une faible épaisseur, ce qui est avantageux pour obtenir une bonne mise au point de l'appareil photographique*),
- milieu tel que les gouttes ne se brisent pas en arrivant sur lui.

En ce qui concerne cette dernière caractéristique, évidemment essentielle à l'obtention de résultats expérimentaux significatifs, nous devons faire les observations suivantes :

L'huile que nous avons utilisée a donné de bons résultats car l'énergie cinétique des gouttes testées n'était pas suffisante pour qu'on enregistre leur rupture sur l'huile. Nous ne savons pas en particulier

Schéma général de l'étude de la granulométrie



si cette huile serait d'utilisation possible en ce qui concerne l'étude de la granulométrie d'un asperseur actuellement en service, notamment pour ce qui est des gouttes ayant la plus grande énergie cinétique.

Nous avons tenté d'expliquer pourquoi l'huile utilisée ne brisait pas les gouttes. En observant l'arrivée des gouttes sur l'huile, nous avons remarqué que cette dernière réagissait vis-à-vis des gouttes comme la pâte à modeler réagit sur les billes en mouvement.

Les gouttes en arrivant sur l'huile s'impriment sur elle et il est possible d'observer une déformation locale de la surface du milieu récepteur qui se traduit par l'apparition d'une zone circulaire déprimée de diamètre très supérieur au diamètre de la goutte.

La goutte semble donc freinée par l'huile qui joue vis-à-vis d'elle le rôle de milieu élastique.

On constate que la goutte d'eau reste relativement longtemps sur la surface de l'huile.

Ensuite, la zone de l'impact s'évanouit progressivement et la goutte se trouve alors englobée dans l'huile comme si l'amplitude de l'onde créée par le choc était supérieure au diamètre de la goutte. Une fois recouverte d'huile, la goutte s'enfonce très lentement.

Nous n'avons jamais observé au choc le jaillissement de petites gouttes d'huile. C'est sans doute à la très forte viscosité de l'huile que nous devons cette intéressante propriété.

Il serait bon de poursuivre cette étude afin de déterminer la viscosité de l'huile à utiliser pour la détermination de la granulométrie des asperseurs réels.

2. METHODE PHOTOGRAPHIQUE - REALISATION EXPERIMENTALE

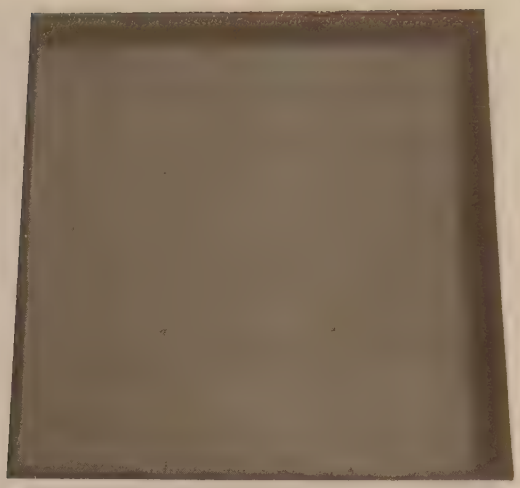
Nous avons construit des bacs parallélipipédiques de base carrée de 0,40 m de côté et de 5 centimètres de hauteur. La base est constituée d'une plaque de verre recouverte d'un papier millimétré transparent au centre duquel nous avons tracé un repère matérialisé par un carré de 10 cm de côté.

Dans ce bac nous versons l'huile précédemment définie de manière à recouvrir entièrement le fond et de telle sorte que l'épaisseur de l'huile soit suffisante pour amortir les gouttes sans perturber leur sphéricité par un contact prématuré avec la plaque de verre.

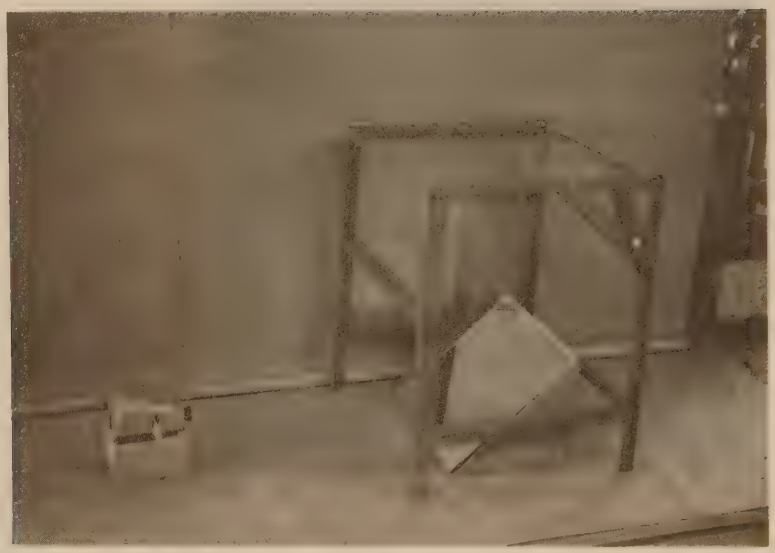
Nous avons constaté que dans la zone proche de l'ajutage, zone dans laquelle les gouttes présentent un faible diamètre, l'épaisseur suffisante d'huile était de 2 à 3 mm. Dans la zone de portée maximale des gouttes, l'épaisseur d'huile nécessaire était de 1 à 2 cm.

Nous plaçons le bac dans l'axe du jet de telle sorte que le centre du carré-repère tracé sur le papier millimétré se trouve à la distance x de l'ajutage.

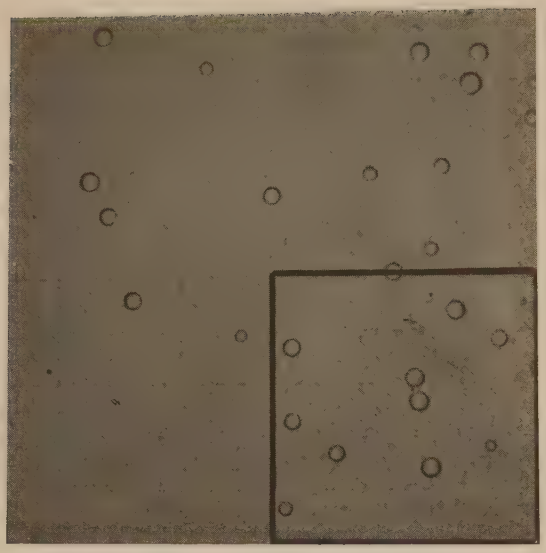
La photographie des gouttes.



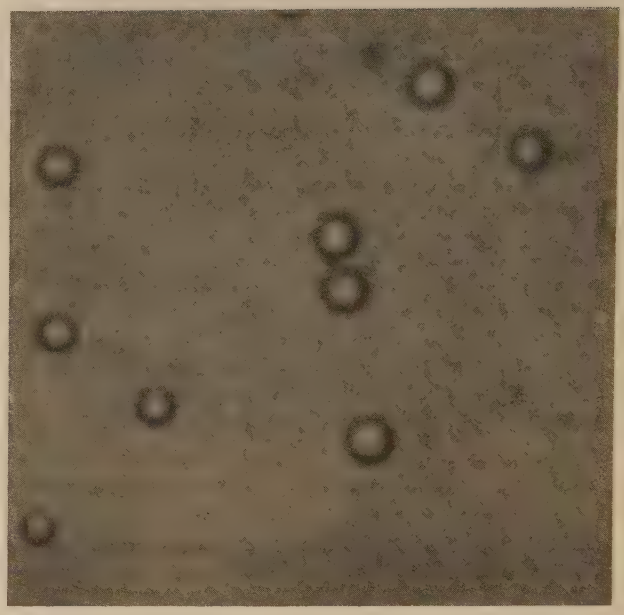
Le plateau rempli d'huile servant à la réception des gouttes.



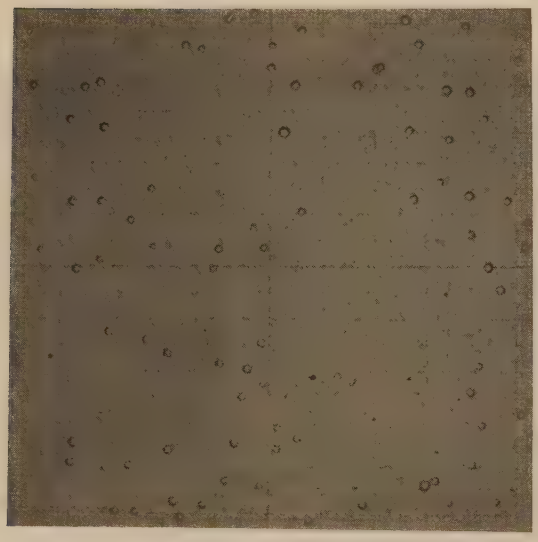
Le schéma expérimental d'agrandissement des photographies en vue de l'étude statistique.



Echantillon des gouttes émises par un ajutage de ϕ 2 mm sous la pression de 3,72 mCE et tombées à 5m de l'ajutage de l'asperseur.
Exposition du récepteur de gouttes : 3 sec.



Agrandissement d'une partie de la photo ci-dessus.
On observera la parfaite sphéricité des gouttes.



Echantillon des gouttes émises par un ajutage de ϕ 2 mm sous la pression de 3,72 mCE et tombées à 4m de l'ajutage.
Exposition du récepteur de gouttes : 60 sec.

Nous écartons le déviateur du jet de l'asperseur et nous déclenchons un chronomètre. Des gouttes tombent sur le bac. Au bout d'un temps t variable en fonction de la densité de gouttes obtenue sur la surface de l'huile, nous dévions le jet de l'asperseur. Nous notons le temps t d'exposition. La prise d'échantillon ainsi réalisée, nous portons le bac sur une plaque de verre dépoli sous laquelle se trouve une source lumineuse permettant d'éclairer uniformément le fond du bac et d'observer, nettement, le fond millimétré ainsi que le contour des gouttes d'eau disséminées dans l'huile.

Au-dessus de ce système d'éclairage se trouve fixé l'appareil photographique qui est mis au point sur le papier millimétré. La photographie une fois obtenue, nous recevons une image agrandie de la photographie sur une table formée d'une plaque de verre sur laquelle est fixée une feuille de papier calque. L'agrandissement est obtenu en jouant sur la position du projecteur par rapport au miroir à 45° placé sous la table.

Grâce à l'image du papier millimétré du fond du bac, nous pouvons obtenir et régler correctement l'agrandissement souhaité.

La forme des gouttes agrandie est dessinée sur le papier calque. Les gouttes sont repérées et numérotées. Pour éviter les effets de bordures, nous ne relevons que les gouttes comprises à l'intérieur du carré repère de 10 cm de côté.

3. METHODE PHOTOGRAPHIQUE - DEPOUILLEMENT DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Désignons par d_i le diamètre mesuré après agrandissement de la i ème goutte.

Le diamètre moyen de l'échantillon sera donné par la relation

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} d_i}{n}$$

n désignant le nombre de gouttes de l'échantillon.

Désignons par e l'agrandissement. Pour toutes nos expériences l'agrandissement a été de 4.

Dans ces conditions, le diamètre réel moyen des gouttes de l'échantillon est

$$\bar{d}_r = \frac{\bar{d}}{e}$$

La dispersion de l'échantillon agrandi autour de sa moyenne sera donnée en calculant l'écart type par la relation suivante :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

L'écart type réel de l'échantillon sera

$$s_r = \frac{s}{e}$$

En admettant que la population des diamètres des gouttes reçues soit de répartition gaussienne, le diamètre moyen obtenu a, par définition de la loi de GAUSS, une probabilité très voisine de 0,95 de se trouver dans l'intervalle.

$$\bar{d}_r \pm \frac{2 s_r}{\sqrt{n}}$$

4. DESCRIPTION DE LA DEUXIEME METHODE EXPERIMENTALE

Dans les mêmes conditions, nous recevons pendant un temps t déterminé, n gouttes que nous comptons. Nous recommençons ν fois la même expérience.

Pendant le temps t il est donc tombé dans le bac en moyenne $\bar{n}$ gouttes.

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\nu} n_i}{\nu}$$

L'écart type de la distribution du nombre des gouttes est donné par la relation

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=\nu} (n_i - \bar{n})^2}{\nu - 1}}$$

Considérons maintenant un temps T déterminé. Les gouttes s'étant fusionnées, il est tombé un volume V. Nous recommençons N fois cette expérience.

Pendant le temps T il est donc tombé dans le bac, en moyenne un volume $\bar{V}$.

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} V_i}{N}$$

L'écart type de la distribution des volumes reçus est donné par la relation

$$S_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (V_i - \bar{V})^2}{N - 1}}$$

Admettons que la population des gouttes soit homogène. En supposant les gouttes sphériques, nous pouvons écrire

$$\bar{V} = \frac{\Pi}{6} d_r^3 \quad \bar{n} \quad \frac{T}{t} \qquad \text{et}$$

$$d_r = \sqrt[3]{\frac{6 \bar{V} t}{\Pi \bar{n} T}}$$

L'erreur relative sur d_r peut être estimée en écrivant

$$\frac{\Delta d_r}{d_r} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \bar{V}}{\bar{V}} + \frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta T}{T} \right)$$

et en prenant pour évaluer $\Delta \bar{V}$ et $\Delta \bar{n}$ les expressions

$$\Delta \bar{V} = \frac{2 s_v}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad \Delta \bar{n} = \frac{2 s_n}{\sqrt{\nu}}$$

Cette méthode est moins immédiate que la précédente car elle suppose a priori que la population de gouttes qui tombe sur un élément de surface est homogène. Elle présente cependant le grand intérêt d'être générale et d'éviter de nombreuses difficultés expérimentales comme le choix du milieu récepteur des gouttes qui assure la non fragmentation de celles-ci à l'impact.

Cette seconde méthode a été en particulier utilisée corrélativement à la première en n'effectuant qu'une seule prise d'échantillon en ce qui concerne le nombre d'impacts. Nous avons ainsi volontairement admis que l'unique échantillon du nombre d'impacts était significatif. On a été ainsi amené à conclure que cette méthode était valable puisque conduisant généralement à des résultats très proches de ceux obtenus à l'aide de la première méthode.

Cette méthode nous permettra dans un proche avenir de définir expérimentalement le spectre granulométrique d'un asperseur.

CHAPITRE III

CONCLUSIONS DE L'ETUDE GRANULOMETRIQUE

1. DETERMINATION DU DIAMETRE DES GOUTTES - SPECTRE GRANULOMETRIQUE

Les tableaux suivants résument l'étude granulométrique entreprise. Nous avons mentionnè successivement les rèsultats obtenus à partir de la mèthode photographique et grace à la mèthode nombre d'impacts - volume moyen empote.

Nous avons testé quatre buses : Ø = 1 mm, 1,5 mm, 2 mm, 2,5 mm.

Pour toutes ces expériences, l'angle de tir α est resté égal à 30° et la pression au niveau de la buse égale à 3,72 m C.E.

La surface de réception des éprouvettes utilisées pour la mesure du volume moyen empoté est de : 84,95 cm^2.

1.1 BUSE DE DIAMETRE 1mm

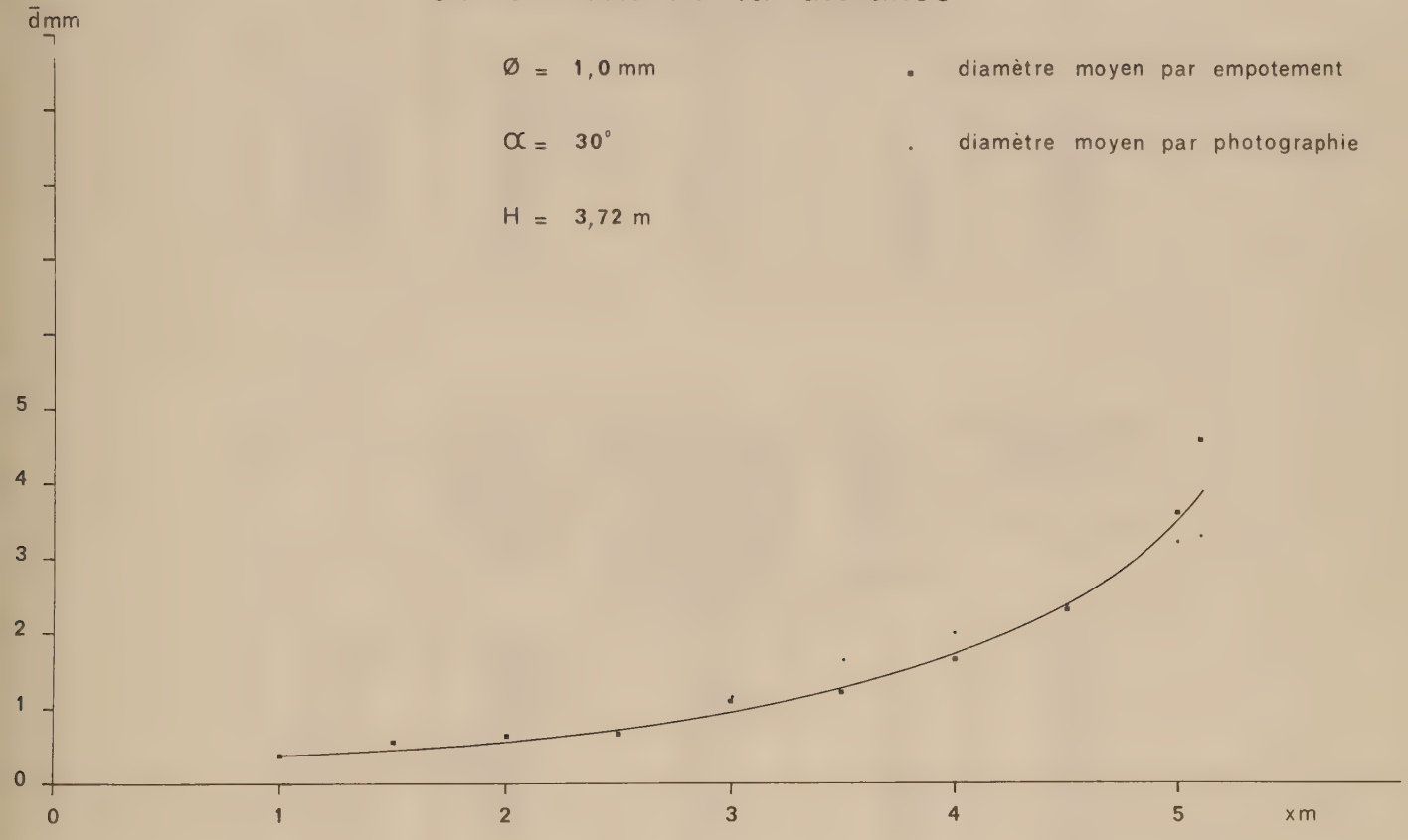
Méthode photographique

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoulement du jet (secondes)	nombre de gouttes reçues sur 100 cm^2 pendant la durée d'écoulement du jet	$\bar{d}_r$ (mm)	s_r (mm)
5, 10	30	29	3, 31	0, 42
5, 00	10	154	3, 23	0, 52
4, 50	2	148	2, 38	0, 37
4, 00	5	81	2, 00	0, 07
3, 50	30	76	1, 64	0, 06
3, 00	90	81	1, 16	0, 004

Méthode nombre d'impacts - volume moyen empoté

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoulement en (s)	nombre de gouttes reçues sur 100 cm^2 pendant la durée d'écoulement du jet	volume moyen en une heure en cm^3	d_r (mm)
5, 10	30	29	148, 7	4, 59
5, 00	10	154	1164, 4	3, 61
4, 50	2	148	1536, 0	2, 34
4, 00	5	81	119, 2	1, 66
3, 50	30	76	7, 2	1, 21
3, 00	90	81	2, 0	1, 13
2, 50	15	58	1, 7	0, 65
2, 00	15	88	2, 25	0, 62
1, 50	20	170	2, 45	0, 56
1, 00	20	322	0, 92	0, 39

Diamètre moyen des gouttes émises par l'asperseur en fonction de la distance



1.2 BUSE DE DIAMETRE 1,5 mm

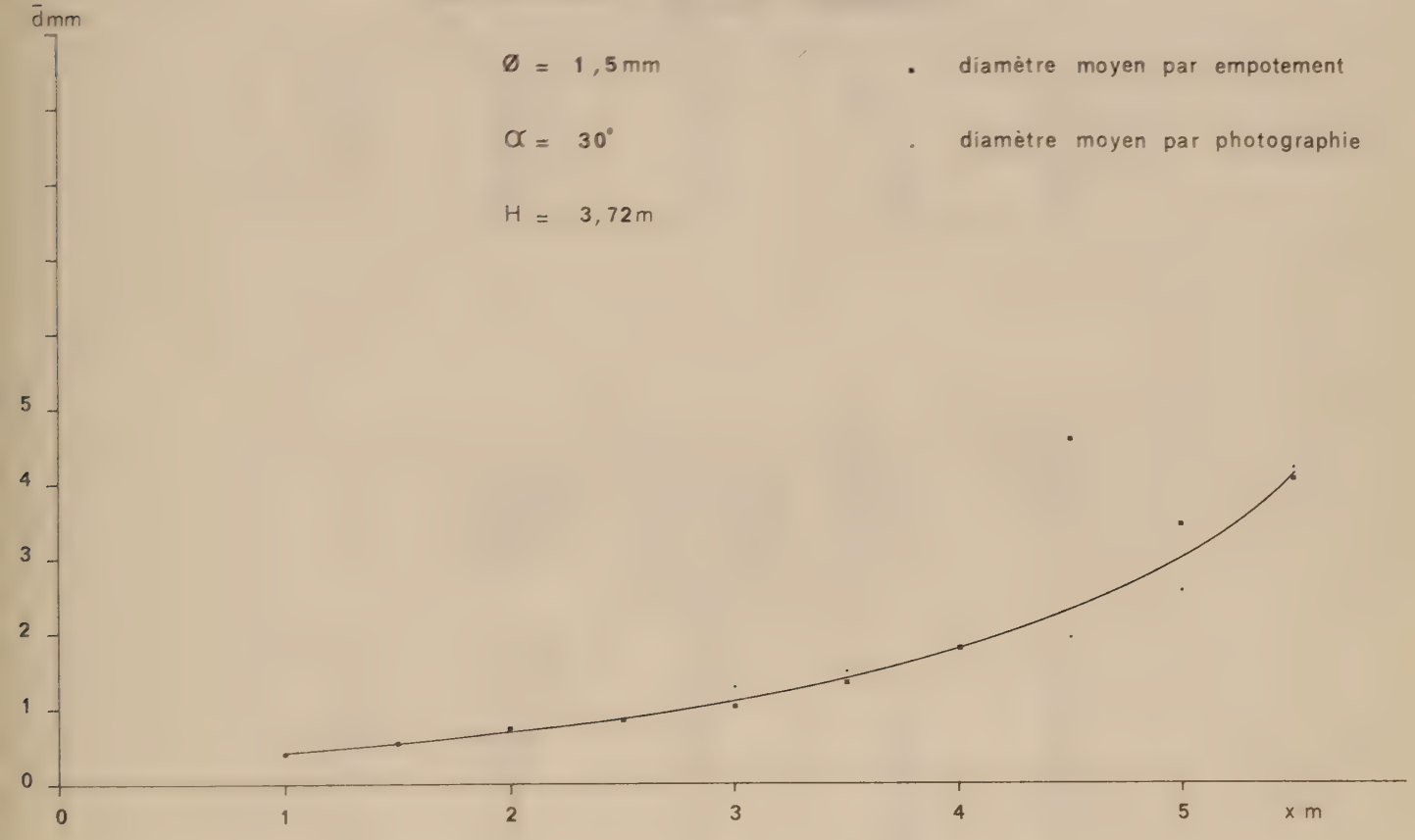
Méthode photographique

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen - dant la durée d'écoulement du jet	d_r (mm)	s_r (mm)
5, 50	3	26	4, 22	0, 54
5, 00	2	111	2, 57	0, 74
4, 50	60	102	1, 94	0, 35
4, 00	10	85	1, 78	0, 80
3, 50	60	95	1, 50	0, 06
3, 00	30	87	1, 27	0, 05

Méthode nombre d'impacts - volume moyen empoté

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen- dant la durée d'écoulement du jet	volume moyen en une heure en cm^3	d_r (mm)
5, 50	3	26	942, 4	4, 08
5, 00	2	111	3723, 0	3, 47
4, 50	60	102	268, 1	4, 61
4, 00	10	85	16, 15	1, 76
3, 50	60	95	6, 25	1, 35
3, 00	30	87	4, 85	1, 02
2, 50	10	52	5, 20	0, 85
2, 00	15	91	3, 75	0, 72
1, 50	20	164	1, 85	0, 52
1, 00	30	117	0, 35	0, 38

Diamètre moyen des gouttes émises par l'asperseur en fonction de la distance



1.3 BUSE DE DIAMETRE 2mm

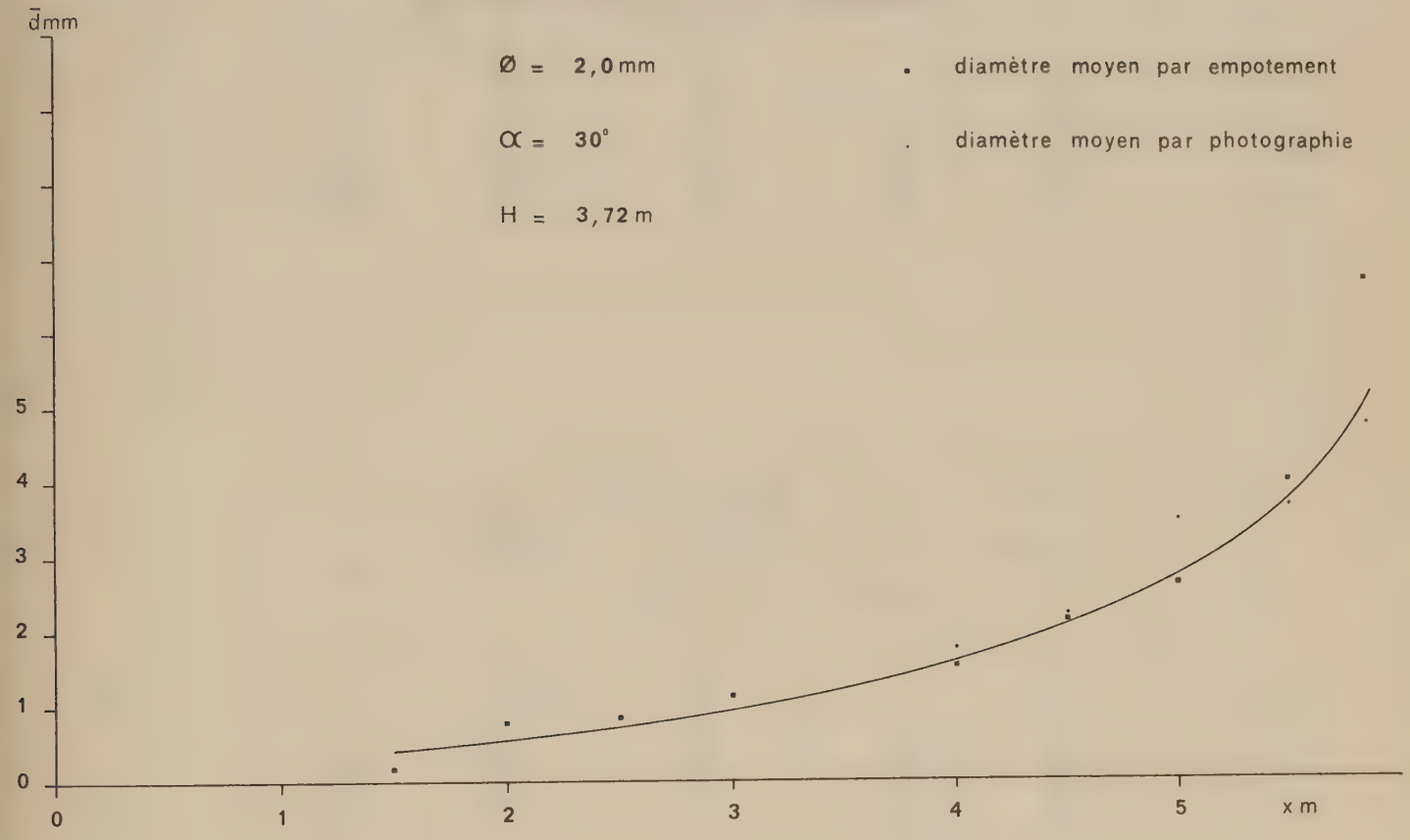
Méthode photographique

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen - dant la durée d'écoulement du jet	d_r (mm)	s_r (mm)
5, 85	1, 5	25	4, 77	0, 83
5, 50	0, 5	53	3, 68	0, 56
5, 00	3	41	3, 50	0, 52
4, 50	50	71	2, 23	0, 31
4, 00	50	89	1, 77	0, 06

Méthode nombre d'impacts - volume empoté

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen- dant la durée d'écoulement du jet	volume moyen en une heure en cm^3	d_r (mm)
5, 85	1, 5	25	8118	6, 73
5, 50	0, 5	53	10955	4, 01
5, 00	3	41	402	2, 64
4, 50	50	71	22, 6	2, 15
4, 00	50	89	10, 3	1, 53
3, 00	15	31	5, 1	1, 15
2, 50	10	44	4, 2	0, 84
2, 00	20	58	2, 3	0, 79
1, 50	30	142	0, 4	0, 17

Diamètre moyen des gouttes émises par l'asperseur en fonction de la distance



1.4 BUSE DE DIAMETRE 2,5 mm

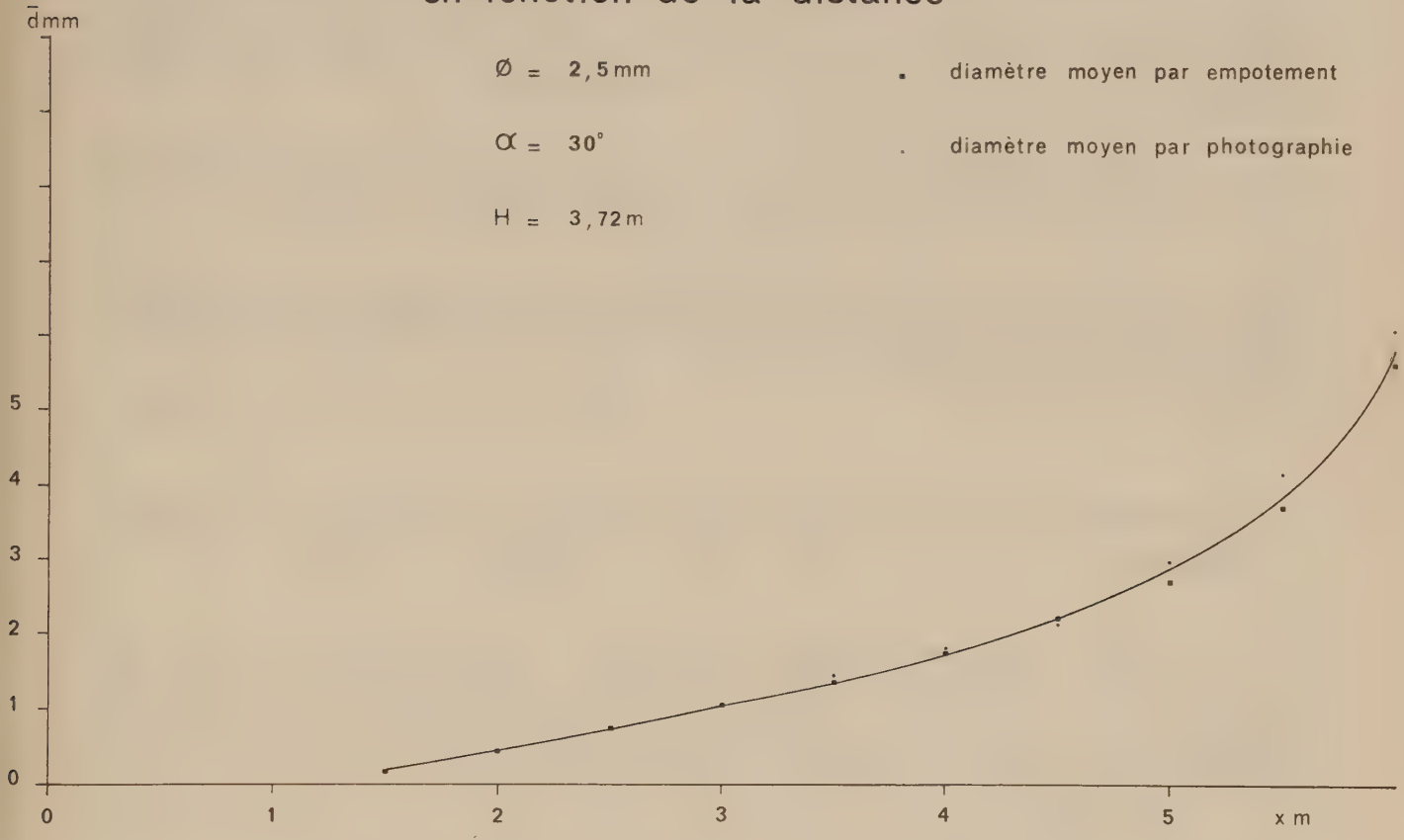
Méthode photographique

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen - dant la durée d'écoulement du jet	d_r (mm)	s_r (mm)
6, 00	0, 5	16	6, 18	1, 80
5, 50	1	60	4, 20	0, 70
5, 00	20	56	3, 00	0, 51
4, 50	40	53	2, 17	0, 30
4, 00	60	80	1, 84	0, 07
3, 50	60	80	1, 45	0, 05

Méthode nombre d'impacts - volume empoté

distance de l'asperseur (m)	durée d'écoule - ment du jet (secondes)	nombre de gout tes reçues sur 100 cm^2 pen - dant la durée d'écoulement du jet	volume moyen en une heure en cm^3	d_r (mm)
6, 00	0, 5	16	8600	5, 65
5, 50	1	60	5051	3, 74
5, 00	20	56	91, 3	2, 73
4, 50	40	53	25, 3	2, 23
4, 00	60	80	12, 1	1, 78
3, 50	60	80	6, 2	1, 42
3, 00	20	14	4, 2	1, 06
2, 50	20	69	2, 4	0, 75
2, 00	20	94	0, 6	0, 43
1, 50	50	222	0, 025	0, 15

Diamètre moyen des gouttes émises par l'asperseur en fonction de la distance



Nous avons tracé les spectres granulométriques, en fonction de la distance, des quatre buses étudiées.

Les graphiques représentatifs sont joints à la présente étude.

La comparaison des résultats expérimentaux obtenus par les deux méthodes utilisées montre que, en première approximation, ceux-ci sont du même ordre de grandeur.

La seconde méthode a été volontairement utilisée avec le minimum d'éléments statistiques afin de juger de l'efficacité de cette dernière en nous plaçant dans des conditions expérimentales défavorables.

Les courbes représentatives du spectre granulométrique d'un asperseur en fonction de la distance montrent qu'il existe une loi physique et non statistique de la répartition des diamètres des gouttes en fonction de la distance. Nous confirmons ainsi d'une manière plus objective l'observation qualitative faite précédemment qui reliait la grosseur des gouttes à leur portée.

La méthode photographique n'a pas été poussée aussi loin que nous l'aurions souhaité faute de posséder un appareillage suffisant pour photographier après agrandissement les gouttes de faible diamètre.

Nous avons constaté aussi que plus on s'approchait de l'asperseur et plus l'uniformité de la population des gouttes augmentait. La comparaison des écarts-types obtenus par la méthode photographique est très significative à cet égard.

2. DETERMINATION DU COEFFICIENT DE TRAINEE C_x DES GOUTTES DE PORTEE MAXIMALE

Notre étude balistique n'ayant porté en définitive que sur les trajectoires maximales, c'est uniquement le coefficient de trainée des gouttes de portée maximale que nous pouvons déduire. En effet, tout au long de cette étude, nous avons remarqué que la balistique et la granulométrie d'un asperseur étaient intimement liées.

L'étude balistique effectuée sur les quatre buses étudiées nous a permis d'obtenir pour chacune d'elle le terme global

$$\frac{m}{2A} = \lambda$$

L'étude granulométrique nous a fourni le diamètre moyen des gouttes, donc la valeur de la masse m moyenne des gouttes en supposant celles ci sphériques.

$$m = \rho \frac{\Pi d^3}{6}$$

Initialement, nous avons posé:

$$A = \frac{1}{2} C_x \rho' S$$

Des équations précédentes, nous pouvons déduire l'expression du coefficient C_x

$$C_x = \frac{2\ \rho\ d}{3\ \rho'\ \lambda}$$

Nous constatons que C_x est sans dimension puisque le terme λ est homogène à une longueur.

En posant : $\rho = 1\ g/cm^3$

$\rho' = 1{,}293\ 10^{-3}\ g/cm^3$

et en exprimant d en millimètres et λ en mètres, nous obtenons la relation

$$C_x = 0{,}515\ \frac{d}{\lambda}$$

La précision de la connaissance du coefficient C_x sera donnée par la relation :

$$\frac{\Delta\ C_x}{C_x} = \frac{\Delta\ d}{d} + \frac{\Delta\ \lambda}{\lambda}$$

Nous n'utiliserons que les résultats de la méthode photographique en ce qui concerne la détermination du diamètre des gouttes.

Les résultats des études balistiques et granulométriques se résument donc au tableau suivant :

buse	$\frac{m}{2A} = \lambda$ (m)	d (mm)	C_x
Ø 1 mm	3,75	3,31	0,45
Ø 1,5 mm	4,75	4,22	0,46
Ø 2 mm	5,75	4,77	0,43
Ø 2,5 mm	6,75	6,18	0,47

Nous avons montré que l'erreur relative commise sur le terme $\frac{m}{2A}$ pouvait se déduire de l'erreur relative commise sur la détermination de la hauteur maximale du jet lorsque l'angle de tir est égal à $\frac{\Pi}{2}$ radians.

Nous avions abouti à la relation très simple

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta Z}{Z}$$

Nous pouvons en déduire la précision obtenue sur la détermination du coefficient C_x.

Le tableau suivant résume le calcul d'erreur de l'étude

buse	Z (m)	ΔZ(m)	d(mm)	Δd (mm)	$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$	$\frac{\Delta d}{d}$	$\frac{\Delta C_x}{C_x}$	$C_x \pm \Delta C_x$
Ø 1 mm	2,60	0,10	3,31	0,42	0,038	0,127	0,16	0,45 ± 0,07
Ø 1,5 mm	2,75	0,10	4,22	0,54	0,036	0,128	0,16	0,46 ± 0,07
Ø 2 mm	2,85	0,10	4,77	0,83	0,035	0,174	0,20	0,43 ± 0,08
Ø 2,5 mm	2,95	0,10	6,18	1,80	0,034	0,280	0,31	0,47 ± 0,14

L'erreur relative commise sur le coefficient de trainée C_x est comprise entre 16 et 30 %. C'est l'indétermination relative du diamètre des gouttes qui est responsable de l'imprécision obtenue sur le coefficient C_x et ce résultat n'est pas pour nous surprendre.

Nous savons que le coefficient C_x est fonction du nombre de REYNOLDS et du nombre de WEBER.

Nous pouvons rapporter les valeurs de C_x obtenues en calculant les nombres de REYNOLDS et de WEBER en fonction de la vitesse des gouttes égale à $\sqrt{\frac{mg}{A}}$

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\nu}\sqrt{\frac{mg}{A}}$$

$$W = \frac{\rho' d\, mg}{\sigma\, A}$$

Dans ces expressions

d désigne le diamètre des gouttes en cm,

ν désigne la viscosité cinématique de l'air prise égale à 0,14 stockes,

ρ' désigne la masse volumique de l'air prise égale à 1,293 g/c m^3,

σ désigne la tension superficielle de l'eau prise égale à 75 dynes/cm,

$\sqrt{\frac{mg}{A}}$ désigne la vitesse limite des gouttes en cm/s.

Nous obtenons les résultats suivants

buse	d (mm)	Nbre de REYNOLDS	Nbre de WEBER	C_x
Ø 1 mm	3,31	2025	4,2	0,45
Ø 1,5 mm	4,22	2910	6,8	0,46
Ø 2 mm	4,77	3630	9,4	0,43
Ø 2,5 mm	6,18	5075	14,2	0,47

3. CONCLUSION DE L'ETUDE GRANULOMETRIQUE

Le coefficient de trainée C_x pour une sphère et pour des nombres de REYNOLDS correspondant à ceux que nous avons trouvés serait compris dans l'intervalle

$$0,43 < C_x < 0,47$$

L'hypothèse de considérer dans les calculs les gouttes comme étant sphériques est donc recevable. Il est en conséquence logique de leur appliquer la valeur de leur coefficient de trainée.

CONCLUSIONS GENERALES DE L'ETUDE

PERSPECTIVES DE RECHERCHES

1. CONCLUSIONS GENERALES

Le point de départ de cette étude a été la remarque fondamentale qu'il n'était pas physiquement recevable d'utiliser la loi de STOKES comme fonction représentative de la résistance de l'air étant donné la valeur élevée du nombre de REYNOLDS à l'origine du mouvement.

Nous avons donc été conduit à utiliser une loi de résistance proportionnelle au carré de la vitesse des gouttes.

L'étude théorique nous a amenés, chemin faisant, à constater que les phénomènes balistiques et granulométriques étaient intimement liés par une relation du type

$$\frac{m}{2\ A}$$

dans laquelle m désignant le facteur granulométrique et A le facteur balistique.

Nous avons montré expérimentalement que, pour une pression et un diamètre de buse donnés, la relation précédente était indépendante de l'angle de tir à l'origine et qu'en conséquence, vu l'intégrabilité complète des équations différentielles du mouvement dans le cas particulier du tir vertical, il nous était possible de calculer la valeur du terme $\frac{m}{2\ A}$.

L'observation d'un jet continu à l'origine, qui se résolvait progressivement en gouttes ensuite, semblait infirmer notre hypothèse de calcul consistant à considérer les gouttes comme formées dès l'origine.

L'étude balistique près de l'origine a montré que nous pouvions rendre compte malgré tout du phénomène physique observé et que, dans cette zone, la parabole classique des tirs dans le vide était la courbe surosculatrice de la trajectoire réelle.

Le schéma probabiliste d'arrivée des gouttes nous a conduit à un modèle théorique soumis à la loi de POISSON.

Les méthodes expérimentales pour déterminer la granulométrie nous ont conduit à des résultats satisfaisants et concordants.

Il ressort enfin de cette étude que les gouttes, bien que déformées durant leur mouvement, peuvent être considérées comme sphériques et que leur coefficient global de trainée peut être pris égal à celui des sphères.

2. PERSPECTIVES DE RECHERCHES

L'étude présentée a été conduite sur modèle réduit. Seule, la formule de la trajectoire a été vérifiée sur un asperseur fonctionnant dans des conditions normales, c'est-à-dire sous des pressions allant de 10 à 40 m de colonne d'eau.

Des études sont actuellement en cours pour déterminer les spectres granulométriques des asperseurs vendus dans le commerce, suivant les méthodes décrites dans cet ouvrage.

Les conclusions de ces études devront nous permettre de confirmer ou de modifier certains résultats obtenus sur modèle réduit, en particulier en ce qui concerne la valeur du coefficient de trainée C_x.

Ces diverses études expérimentales trouveront leur aboutissement dans l'établissement d'un abaque de calcul résumant les possibilités techniques d'un asperseur.

Au point de vue technique, un asperseur doit répondre à trois impératifs :

- assurer une bonne uniformité d'arrosage,
- être influencé le moins possible par l'action perturbatrice du vent,
- répandre de l'eau sans mortifier les végétaux ni provoquer la battance des sols.

Le premier impératif sera résolu par la connaissance du spectre granulométrique et des lois balistiques, et nous pensons que la technologie même de l'asperseur est à l'heure actuelle entièrement à repenser.

En effet, dans l'irrigation aujourd'hui pratiquée, l'uniformité d'arrosage est obtenue en recoupant les zones d'influence de plusieurs asperseurs identiques, implantés suivant un dispositif donné. Pour assurer l'arrosage d'une parcelle aussi uniforme que possible, il faut un nombre considérable d'asperseurs et par suite un grand nombre de rampes mobiles d'arrosage.

Nous envisageons un asperseur à buses multiples de diamètre variable et à angle de tir à l'origine variable afin d'obtenir par le jeu continu des spectres granulométriques et des portées, variables pour chaque buse, une uniformité plus constante sur toute la zone d'influence de l'asperseur.

La création d'un asperseur présentant une répartition pluviométrique homogène sur son cercle d'influence réduirait considérablement le recoupement des zones d'influences des divers asperseurs voisins. Il en résulterait une diminution de la quantité de matériel à mettre en service ainsi qu'une économie dans les investissements nécessaires à l'irrigation d'une parcelle donnée.

Pour ce qui est des deux derniers impératifs, à savoir l'influence du vent sur la répartition de l'eau au sol et la mortification des végétaux, il existe un optimum granulométrique à déterminer.

En effet, plus un asperseur pulvérise des gouttes fines, plus un vent, même de faible importance, présente une action préjudiciable à la bonne répartition de l'eau au sol. Un asperseur qui pulvérise des grosses gouttes assurera, toutes choses égales par ailleurs, une meilleure stabilité des gouttes et la bonne uniformité d'arrosage sera préservée. Par contre, l'effet mortifiant sur les végétaux et la battance des terres seront prépondérants. Le glaçage des sols et le développement des maladies cryptogamiques seront davantage à redouter.

Il y a donc un optimum granulométrique à déterminer, et nous voyons, une fois de plus, l'importance technique de ce facteur tant pour l'agronome que pour l'ingénieur chargé de l'étude d'un projet d'irrigation.

Tels sont les objectifs que nous comptons atteindre dans l'avenir et cette étude n'en aura été en définitive que le préambule.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES GENERAUX

COMOLET R. Mécanique expérimentale des fluides - Masson

DELACHET A. & TAILLE J. La Balistique - PUF

OTTENHEIMER J. Balistique extérieure - Armand Colin

PERES J. Mécanique générale - Masson

OUVRAGES ET ARTICLES SPECIALISES

ACCKERS P. "Resistance of fluids flowing in channels and pipes" Hydraulics Research Paper n°1 Dept. of Scientific and Industrial Research, Hydraulics Research St., London Her Majesty's Printing Office 1958

BENTLEY W.A "Studies of rain drop and rain drop phenomena" 1904

BILANSKI W.K & KIDDER E.H "Factors that affect the distribution of water from a medium pressure rotary irrigation sprinklers" Transactions of the ASAE - 1958

BIELAIEV W. & LEBEDIEV B.M " Les machines d'irrigation par aspersion". Moscou 1957

BLANCHARD D.C "Observations on the behaviour of water drop" General Electric Research Laboratory Project Cirrus 1948

BLANCHARD D.C. "Experiments with water drop and the interaction between them at terminal velocity in air" General Electric Research Laboratory - 1949

CHRISTIANSEN J.E "Irrigation by sprinkling" Univ. of California Agr. Exp. Sta - bul 670 - 1942

DEBEAUVAIS F. "Contribution à l'étude de la désagrégation des jets liquides dans l'air en mouvement" - Dunod - 1964

DOUCHEZ — "Similitude des écoulements en méçanique des corps en suspension"
Industries Thermiques et Aérauliques - 1963

ELHANANI S. — "Sprinkler irrigation"
Ministry of Agriculture Extension Authority Hakirya Tel-Aviv, Israël - 1961

FINKEL H.J, de LEEUW A, IRMAY S. — "Irrigation spinkling drops ; their formation, evaporation losses, effects upon the soil"
Technion Israël Inst. of Technology - Haïfa - Israël - 1964

FORTIER A. — "Sur l'instabilité des jets confinés"
Société Hydrotechnique de France - VIIIèmes journées de l'Hydraulique - 1964

FROST K.R & SCHWALEN H.C — "Sprinkler evaporation losses"
Agric. Eng. 36 - 1955

GREEN R.L — "Evaluation of air resistance to freely falling drop of water"
Agric. Eng. - 1952

GREEN R.L — "A photographic technic for measuring the sizes and velocities of water drop from irrigation sprinklers"
Agr. Eng. - 1952

GUNN R. & KINZER G. — "The terminal velocity of fall of water droplets in stagnant air"
Journal Meteorol. - 1949

HARDT W.E — "Data on the distribution of water losses of small sprinklers in winds of 0-20 miles per hour"

JENKINS D.C — "The acceleration of water drop by an airstream of constant relative velocity"
Ministry of Aviation - 1961

LAWS J.O — "Measurements of the fall velocities of water drop and raindrop"
Transaction A.G.U. - 1941

LAWS J.O & PARSONS D.A — "The relation of rain drop, size to intensity"
Transaction A.G.U. - 1943

LAWS J.O — "Recent studies in rain drop and erosion"
Agric. Eng. 21 - 1940

LEVINE G. — "Effects of irrigation droplet size on infiltration and aggregate breakdown
Agric. Eng. - 1952

REITZER H. — "Contribution à l'étude des jets "formation et déviation"
Dunod - 1964

SAVIC P. "Circulation and distortion of liquid drop falling through a viscous medium"
N.R.C. - 1953

SEGINER I. "Tangential velocity of sprinkler drop"
Transactions of the ASAE - 1963

SEGINER I. "Water distribution from medium pressure sprinklers"
Transactions of the ASAE - 1963

SZALAY M. "Théorie balistico-statistique des asperseurs d'irrigation"
Société Hydrotechnique de France
VIIèmes journées de l'Hydraulique - 1962

WIERSMA J.L "Effect of wind variation on distribution from rotating sprinklers"
Tech. bul. 16 - Agr. Exp. Sta, Dakota - St. College

WOODWARD G.O "Sprinkler irrigation"
Sprinkler Irrg. Assoc. Santa Monica.

DEUXIEME THESE

———o-o———

Propositions données par la Faculté

"Pertes de charge dans les rampes mobiles d'irrigation"

Vu et approuvé:

Paris le 7 Juillet 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'Imprimer:

Le Recteur de l'Académie
de Paris

Jean ROCHE